数学学力テストSⅠβ　詳解

共通問題　　各4点

(1)　与式を a について整理し，

$$x^2-8a+2ax-16=(2x-8)a+x^2-16$$
$$=2(x-4)a+(x+4)(x-4)$$
$$=(x-4)\{2a+(x+4)\}$$
$$=\underline{\underline{(x-4)(x+2a+4)}}$$

(2)　$|x-3|>2$ から　$x-3<-2,\ 2<x-3$　　よって，$\underline{\underline{x<1,\ 5<x}}$

(3)　$y=x^2+ax+b$のグラフの頂点は，点(3，1)を x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した点である。

その座標は　(3+(−2)，1+1)　すなわち　(1，2)

よって，

$y=x^2+ax+b$ は　$y=(x-1)^2+2$　すなわち　$y=x^2-2x+3$ と一致する。

したがって　　$\underline{\underline{a=-2,\ b=3}}$

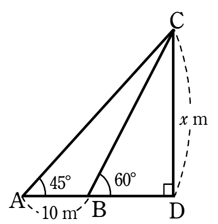
(4)　2 次方程式 $x^2-mx+3m-5=0$ の判別式を D とすると

$D=m^2-4\times1\times(3m-5)=m^2-12m+20$

この 2 次方程式が実数解をもつためには，$D\geqq0$ であればよい。

よって，$m^2-12m+20\geqq0$　より　$\underline{\underline{m\leqq2,\ 10\leqq m}}$

(5)　CD $=x$ (m) とすると



$\tan60^\circ=\dfrac{x}{\mathrm{BD}}$　すなわち　$\sqrt{3}=\dfrac{x}{\mathrm{BD}}$

よって　$\mathrm{BD}=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

△ACD について，

$\mathrm{CD}=\mathrm{AD}\tan45^\circ=\mathrm{AD}=\mathrm{AB}+\mathrm{BD}$

であるから　$x=10+\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

整理して　$(\sqrt{3}-1)x=10\sqrt{3}$

よって　$x=\dfrac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{10\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{10\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3-1}=15+5\sqrt{3}$

したがって，C，D 間の距離は　$\underline{15+5\sqrt{3}\ (\mathrm{m})}$

(6)　$A=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$

正弦定理により　$\dfrac{2}{\sin60^\circ}=\dfrac{b}{\sin45^\circ}$

よって　$b=\dfrac{2\sin45^\circ}{\sin60^\circ}=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\underline{\underline{\dfrac{2\sqrt{6}}{3}}}$

(7)　$(x-1)^2+(y-1)^2=0$ が成り立つとき，$x-1=0$，$y-1=0$ より，$x=1$，$y=1$ から

命題「$(x-1)^2+(y-1)^2=0\Longrightarrow x=y=1$」は真である　…（ア）

また，$x=y=1$ が成り立つとき，$(x-1)^2+(y-1)^2=(1-1)^2+(1-1)^2=0$ から

命題「$x=y=1\Longrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=0$」は真である　…（イ）

（ア），（イ）より

$(x-1)^2+(y-1)^2=0$ は，$x=y=1$ であるための必要十分条件であるから，

正しいものは $\underline{①}$

(8)　①　最大値が 160 以上であるので，160 台以上の日が少なくとも 1 日あることが読み取れるが，3 日以上あるかどうかは読み取れないので，正しくない

②　中央値が 130 台より大きいので，車の交通量が 130 台以下であるのは，全体の半分以下の日数であることが読み取れるので，正しくない

③　第 1 四分位数が 110 台以上，第 3 四分位数が 160 台未満であるから，110 台以上 160 台未満に半分以上の日が分布していることが読み取れるので，正しい

以上から，正しいものは $\underline{\underline{③}}$

(9)　分散 $s^2=\dfrac{1}{8}\{0^2+(-2)^2+0^2+(-1)^2+1^2+0^2+3^2+(-1)^2\}=2$

よって，標準偏差 $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{2}=1.41\cdots\fallingdotseq\underline{\underline{1.4}}$

(10)　大人 5 人が並んだあと，その間に子どもが入ると考えればよい。

5 人分の円順列なので $(5-1)!=4!$ (通り)

次に，子どもが座ることが出来る 5 ヶ所から 3 ヶ所を選び並べればよいので

$4!\times{}_5\mathrm{P}_3=\underline{\underline{1440\ (通り)}}$

(11)　選ばれた 1 人がこの商品を知らないという事象を A，女性であるという事象を B とすると

$P(A)=\dfrac{90+60}{400}=\dfrac{3}{8}$，$P(A\cap B)=\dfrac{150-90}{400}=\dfrac{6}{40}$

よって，求める確率は $P_A(B)=\dfrac{\frac{6}{40}}{\frac{3}{8}}=\dfrac{6}{40}\div\dfrac{3}{8}=\underline{\underline{\dfrac{2}{5}}}$

(12)　∠IAC＝∠IAB＝36°

∠IBA＝∠IBC＝32°

∠ICA＝∠ICB＝α

△ABC において，内角の和は 180° であるから　　$2(36^\circ+32^\circ+\alpha)=180^\circ$

これを解いて　　$\alpha=\underline{\underline{22^\circ}}$

(13)　BT は円 O の接線であるから　　∠BAC＝∠CBT＝40°

等しい弧 BC，DC に対する円周角は等しいから

∠BAC＝∠DAC＝40°

ゆえに

∠BAD＝∠BAC＋∠DAC＝40°＋40°＝80°

四角形 ABCD は円に内接しているから

$\alpha+80^\circ=180^\circ$　　　よって　　$\alpha=\underline{\underline{100^\circ}}$

(14)　360 を素因数分解すると，　$360=2^3\cdot3^2\cdot5$

よって，360 の正の約数の個数は　　$(3+1)(2+1)(1+1)=4\cdot3\cdot2=\underline{\underline{24}}$ (個)

(15)　$1207=994\times1+213$

$994=213\times4+142$

$213=142\times1+71$

$142=71\times2$

よって，1207 と 994 の最大公約数は $\underline{\underline{71}}$

［β－1］場合の数　　(1)(2) 各5点，(3) 10点

(1)　異なる色の玉を取り出すという事象は，3 つの事象

（i）S から白玉を取り出し，T から白玉以外を取り出す

（ii）S から赤玉を取り出し，T から赤玉以外を取り出す

（iii）S から青玉を取り出し，T から青玉以外を取り出す

の和事象であり，これらの事象はそれぞれ互いに背反である。

よって，求める確率は

$\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{4}{7}+\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{5}{7}+\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{5}{7}=\underline{\underline{\dfrac{33}{49}}}$

(2)　9 個の数字の中から 6 個を並べてつくることができる6桁の整数で1番小さい数は「123456」である。ここで，「12」で始まる 6 桁の整数 12□□□□ は，残り 7 個の数字の中から 4 個の数字を並べるので，${}_7\mathrm{P}_4=840$ (通り)

「139876」は「13」で始まる 6 桁の整数の最後の数 であり，「13」で始まる 6 桁の整数13□□□□ は同様に考えると840通りあるので，139876 は

$840+840=\underline{\underline{1680\ (番目)}}$　の数である。

(3)　Aが優勝する場合は次の(i)〜(iii)の3通りがある。

(i)　Aが3勝0敗の場合

その確率は，${}_3\mathrm{C}_3\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$　3

(ii)　Aが3勝1敗の場合

3ゲーム目までにAが2勝1敗して，4ゲーム目にAが勝つので，

その確率は，${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{27}$　6

(iii)　Aが3勝2敗の場合

4ゲーム目までにAが2勝2敗して，5ゲーム目でAに勝つので，

その確率は，${}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{16}{81}$

よって，求める確率は $\dfrac{8}{27}+\dfrac{8}{27}+\dfrac{16}{81}=\dfrac{64}{81}$　10

［β−2］数学と人間の活動　(1)(2) 各5点，(3) 10点

(1)　等式を整理すると　$(x-3)(y+2)=-5$

x，y は整数であるから，$x-3$，$y+2$ も整数である。

よって　$(x-3,\ y+2)=(1,\ -5),\ (-1,\ 5),\ (5,\ -1),\ (-5,\ 1)$

したがって　$\underline{\underline{(x,\ y)=(4,\ -7),\ (2,\ 3),\ (8,\ -3),\ (-2,\ -1)}}$

(2)　この数の列は，5 進法で表された自然数の列と考えられる。

$2023_{(5)}=2\cdot5^3+0\cdot5^2+2\cdot5^1+3\cdot5^0=263$

よって，2023 は $\underline{263\text{ 番目}}$の数である。

(3)　n は整数 x，y を用いて，次のように表される。

$n=8x+3$，　$n=5y+4$　△3

よって　$8x+3=5y+4$

すなわち　$8x-5y=1$　……①

$x=2$，$y=3$ は，① の整数解の 1 つであるから

$8\cdot2-5\cdot3=1$　……②

①−② から　$8(x-2)-5(y-3)=0$　……③

8 と 5 は互いに素であるから，③ を満たす整数 x は　△6

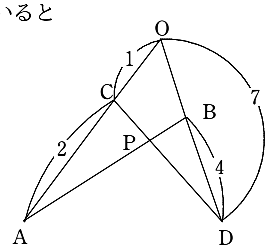
$x-2=5k$　すなわち　$x=5k+2$　(k は整数)　と表される。

ゆえに　$n=8x+3=8(5k+2)+3=40k+19$

したがって，求める余りは　$\underline{19}$　⑩

［β−3］平面図形　(1)(2) 各5点，(3) 10点

(1)　△OABと直線CDにメネラウスの定理を用いると



$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DO}}=1$$

$\dfrac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CA}}=\dfrac{1}{2}$，　$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DO}}=\dfrac{4}{7}$ から

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{4}{7}=1$$

よって　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}=\underline{\underline{\dfrac{7}{2}}}$

(2)　平行四辺形の対角線は互いに他を2等分するから　OA＝OC

また，　CE＝ED

よって，Fは 2 本の中線の交点であるから △ADCの重心であり　FD：OD＝2：3

ゆえに　△AFD：△AOD＝2：3

したがって　$\triangle\mathrm{AOD}=\dfrac{3}{2}\triangle\mathrm{AFD}=\dfrac{15}{2}$

OB＝ODであるから　$\triangle\mathrm{ABO}=\triangle\mathrm{AOD}=\underline{\underline{\dfrac{15}{2}}}$

(3)　方べきの定理により

$\mathrm{CF}\cdot\mathrm{CA}=\mathrm{CD}\cdot\mathrm{CM}=2\cdot3=6$

よって　$\mathrm{CF}=\dfrac{6}{\mathrm{CA}}$　……①　△3

また，方べきの定理により

$\mathrm{BE}\cdot\mathrm{BA}=\mathrm{BM}\cdot\mathrm{BD}=3\cdot4=12$

よって　$\mathrm{BE}=\dfrac{12}{\mathrm{BA}}$　……②　△6

AD は ∠BAC の二等分線であるから

BA：CA＝BD：DC＝2：1

よって　BA＝2CA

したがって，①，② から

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{CF}}=\mathrm{BE}\div\mathrm{CF}=\frac{12}{\mathrm{BA}}\div\frac{6}{\mathrm{CA}}=\frac{12}{2\mathrm{CA}}\times\frac{\mathrm{CA}}{6}=\underline{1}$$　⑩

［β−4］2次関数　(1)(2) 各5点，(3) 10点

(1)　$y=x^2+ax+b$ が点 $(-1,\ 1)$ を通るので，

$1=(-1)^2+a(-1)+b$　より　$a=b$

よって　$y=x^2+ax+a$

2 方程式 $x^2+ax+a=0$ の判別式を D とすると

$D=a^2-4a=a(a-4)$

グラフが x 軸に接しているので，　$D=0$

つまり　$a(a-4)=0$

$a>0$ より　$\underline{\underline{a=4,\ b=4}}$

(2)　$2x+y=1$ から　$y=1-2x$　……①

よって　$x^2+y^2=x^2+(1-2x)^2=5x^2-4x+1=5\left(x-\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}$

ゆえに，$x=\dfrac{2}{5}$ で最小値 $\dfrac{1}{5}$ をとる。

このとき，①から　$y=1-2\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}$

したがって　$\underline{\underline{x=\dfrac{2}{5},\ y=\dfrac{1}{5}\text{ で最小値 }\dfrac{1}{5}}}$

(3)　$ax^2-(a^2+1)x+a>0$

$(ax-1)(x-a)>0$　△3

(i)　$0<\dfrac{1}{a}\leqq a$　すなわち　$1\leqq a$ のとき　$x<\dfrac{1}{a}$，$a<x$　△6

(ii)　$0<a<\dfrac{1}{a}$　すなわち　$0<a<1$のとき　$x<a$，$\dfrac{1}{a}<x$　⑩

［β−5］図形と計量　(1)(2) 各5点，(3) 10点

(1)　$\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\dfrac{\cos\theta(1-\sin\theta)+\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\dfrac{2\cos\theta}{1-\sin^2\theta}=\dfrac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{2}{\cos\theta}$

ここで　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$1+(\sqrt{2})^2=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$，　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{3}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$　$\tan\theta=\sqrt{2}$ より　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって　$\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\underline{\underline{2\sqrt{3}}}$

(2)　最初に見下ろしたときの，崖の真下の海面から船までの距離は，

$30\times\tan38°=30\times0.781=23.43$　(m)

1 分後に見下ろしたときの，崖の真下の海面から船までの距離は，

$30\times\tan65°=30\times2.145=64.35$　(m)

よって，船の移動した距離は，　$64.35-23.43=40.92\fallingdotseq\underline{\underline{40.9\ (\mathrm{m})}}$

(3)　余弦定理により　$2^2=(\sqrt{6})^2+c^2-2\cdot\sqrt{6}\cdot c\cdot\cos45°$

式を整理すると　$c^2-2\sqrt{3}c+2=0$

これを解くと　$c=\sqrt{3}\pm1$　△3

(i)　$c=\sqrt{3}+1$ のとき

余弦定理により　$\cos B=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot2}$

$=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{4(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{1}{2}$

よって　$B=60°$

したがって　$C=180°-(45°+60°)=75°$

(ii)　$c=\sqrt{3}-1$ のとき

余弦定理により　$\cos B=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot2}$

$=\dfrac{2(1-\sqrt{3})}{4(\sqrt{3}-1)}=-\dfrac{1}{2}$

よって　$B=120°$

したがって　$C=180°-(45°+120°)=15°$

以上から　$c=\sqrt{3}+1$，$B=60°$，$C=75°$　△6

または　$c=\sqrt{3}-1$，$B=120°$，$C=15°$　⑩

(別解)

正弦定理により　$\dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sin B}$

よって　$\sin B=\dfrac{\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ゆえに　$B=60°$，$120°$

$B=60°$ のとき，　$C=180°-(45°+60°)=75°$

$B=120°$ のとき，　$C=180°-(45°+120°)=15°$

余弦定理により　$2^2=(\sqrt{6})^2+c^2-2\cdot\sqrt{6}\cdot c\cdot\cos45°$

式を整理すると　$c^2-2\sqrt{3}c+2=0$

これを解くと　$c=\sqrt{3}\pm1$

$\sqrt{3}+1>\sqrt{3}-1$ であるから

$B=60°$，$C=75°$，　$c=\sqrt{3}+1$　または　$B=120°$，$C=15°$，　$c=\sqrt{3}-1$