数学学力テストSⅠβ　詳解

共通問題　各4点

(1)　$(x-3)^2(x+3)^2=\{(x-3)(x+3)\}^2=(x^2-9)^2=\underline{x^4-18x^2+81}$

(2)　$x=\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{4(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=3+\sqrt{5}$

$y=\dfrac{4}{3+\sqrt{5}}=\dfrac{4(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=3-\sqrt{5}$

基本対称式　$x+y=(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})=6$　$xy=(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=4$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=36-8=\underline{28}$

(3)　$-a<x-2<a$ ならば　$-3<x<9$，$-a+2<x<a+2$ ならば　$-3<x<9$

すなわち、$-a+2\geqq-3$ かつ $a+2\leqq9$ であるから、これを満たすのは、

$a\leqq5$　最大値は $\underline{5}$ である。

(4)　軸が直線 $x=-3$ であるから，求める2次関数は

$$y=a(x+3)^2+q$$

と表される。

このグラフが2点（1，7），（−2，−8）を通るから

$$7=a(1+3)^2+q,\quad -8=a(-2+3)^2+q$$

すなわち　$16a+q=7$，$a+q=-8$

これを解いて　$a=1$，$q=-9$

よって　$\underline{y=(x+3)^2-9}$

(5)　$x^2-6x+10=(x-3)^2+1$

よって，放物線 $y=x^2-6x+10$ の頂点は点$(3,\ 1)$

平行移動により，この点は点$(3+1,\ 1-2)$

すなわち　点$(4,\ -1)$

に移るから，求める放物線の方程式は

$\underline{y=(x-4)^2-1}$

（別解）

放物線 $y=x^2-6x+10$ の x を $x-1$，y を $y-(-2)$ におき換えると

$$y-(-2)=(x-1)^2-6(x-1)+10$$

よって，求める放物線の方程式は　$\underline{y=x^2-8x+15}$

(6)　△ABC において，余弦定理により，

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cos60^\circ=9+16-2\cdot3\cdot4\cdot\frac{1}{2}=13$$

$c>0$ であるから，$\underline{c=\sqrt{13}}$

(7)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ であるから，$1+\tan^2\theta=1\div\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$

$1+\tan^2\theta=\dfrac{25}{4}$

$\tan^2\theta=\dfrac{21}{4}$

$\cos\theta>0$ であるから，$0^\circ<\theta<90^\circ$　したがって　$\tan\theta>0$

よって，$\tan\theta=\underline{\dfrac{\sqrt{21}}{2}}$

(8)　b のヒストグラムから，データの中央値は30以上40未満の値であると読み取れる。

また，a と b のヒストグラムを見比べると，四分位範囲が b の方が広い。

よって，b のヒストグラムが対応している箱ひげ図は $\underline{\text{ア}}$

(9)　データの偏差は、-1，1，-2，-4，3，6，-2，-1

これより、$(\text{偏差})^2$ は、1，1，4，16，9，36，4，1

よって、チームのデータの分散は，$\dfrac{1+1+4+16+9+36+4+1}{8}=\dfrac{72}{8}=9$

よってチームのデータの標準偏差は　$\sqrt{9}=\underline{3}$ (点)

(10)　起こりうる場合の総数は 6^3 通りで「少なくとも2個の目が同じ」という事象は，

「3個の目がすべて異なる」という事象の余事象である。

よって，求める確率は　$1-\dfrac{6\times5\times4}{6^3}=\underline{\dfrac{4}{9}}$

(11)　450を素因数分解すると　$450=2\cdot3^2\cdot5^2$

450の正の約数は，2 の正の約数と 3^2 の正の約数と 5^2 の正の約数の積で

表される。　2 の正の約数は　1，2の2個

3^2 の正の約数は　1，3，3^2 の3個

5^2 の正の約数は　1，5，5^2 の3個

よって，約数の総和は　$(1+2)(1+3+3^2)(1+5+5^2)=3\times13\times31=\underline{1209}$

(12)　円の接線の性質により　$\mathrm{CQ}=\mathrm{CP}=3$，$\mathrm{BR}=\mathrm{BP}=4$

よって　$\mathrm{AQ}=\mathrm{AR}=10-4=6$

したがって　$x=\mathrm{AQ}+\mathrm{CQ}=6+3=\underline{9}$

(13)　円周角の定理により

$\angle\mathrm{AOD}=2\angle\mathrm{ABD}$

よって　$\angle\mathrm{AOD}=2\cdot25^\circ=50^\circ$

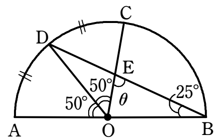
$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}=\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ から　$\angle\mathrm{DOC}=\angle\mathrm{AOD}=50^\circ$

よって　$\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{AOD}+\angle\mathrm{DOC}=100^\circ$

すなわち　$\angle\mathrm{AOE}=100^\circ$

△OBE において，∠O の外角の大きさが 100° であるから

$\theta+25^\circ=100^\circ$　よって　$\theta=\underline{75^\circ}$



(14)　$\sqrt{270n}$ が自然数になるには $270n$ が自然数の平方数になればよい。

$270=2\cdot3^3\cdot5$ より，$270n$ が平方数になるような最小の n は $2\cdot3\cdot5=30$

したがって　$\underline{30}$

(15)　k，l を整数とすると、a，b はそれぞれ次のように表せる。

$a=8k+5$，$b=8l+6$ このとき，$a-b=8(k-l)-1=8(k-l-1)+7$

$k-l-1$ は整数であるから，$a-b$ を8で割ったときの余りは　$\underline{7}$

[$\beta-1$] 場合の数　(1)(2)各 5 点, (3) 10 点

(1) 8 文字のうち、 A が 3 個、 K が 2 個、他の文字が 1 個ずつある。

これらを 1 列に並べるから　$\dfrac{8!}{3!2!1!1!1!}=\underline{\underline{3360}}$ (通り)

(2)　$P_A(B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{12}{42}=\underline{\underline{\dfrac{2}{7}}}$

(3)　1 回の試合で A が勝つ確率は $\dfrac{1}{3}$，B が勝つ確率は $\dfrac{2}{3}$ である。

A が優勝するのは，次の 3 つの場合がある。

[1]　3 連勝の場合

その確率は　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{3^3}$

[2]　3 勝 1 敗の場合

3 試合目までに A が 2 回勝ち，4 試合目に A が勝つ場合である。

その確率は　${}_3C_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3^3}$

[3]　3 勝 2 敗の場合

4 試合目までに A が 2 回勝ち， 5 試合目に A が勝つ場合である。

その確率は　${}_4C_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3^4}$

[1] ～ [3] の場合は互いに排反である。

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{2}{3^3}+\dfrac{8}{3^4}=\dfrac{3+6+8}{3^4}=\dfrac{17}{81}$ ⑩

※途中点

[1]~[3]のうちいずれか 1 つで　△3

[1]~[3]のうちいずれか 2 つで　△6

[$\beta-2$] 数学と人間の活動　(1)(2)各 5 点, (3) 10 点

(1)

$$\begin{array}{rr} & 11101_{(2)} \\ +) & 111_{(2)} \\ \hline & \underline{\underline{100100_{(2)}}} \end{array}$$

(2)　□に入る数を大きい位から順に a, b （$0\leqq a\leqq 9, 0\leqq b\leqq 9$ ）とする。

偶数桁目の和は，$3+9=12$，奇数桁目の数の和は $4+a+b$

$(4+a+b)-12=a+b-8$ が11の倍数であるとき，5桁の自然数は11の倍数になる。

$a+b-8$ が11の倍数になり，5桁の自然数が最大となるのは $a=8$，$b=0$ のときである。

よって求める自然数は$\underline{\underline{43890}}$

(3)　アメを x 個、チョコ y 個買うとすると， $40x+90y=850$ が成り立つ。

両辺を10で割ると， $4x+9y=85$ ……①

$x=10, y=5$ は①の整数解の 1 つである。 △3

よって， $4\cdot10+9\cdot5=85$……②

①−② から $4(x-10)+9(y-5)=0$　すなわち $4(x-10)=-9(y-5)$

4と9は互いに素であるから， k を整数として，

$x-10=9k$, $y-5=-4k$　したがって， $x=9k+10$, $y=-4k+5$ ……③ △6

$x\geqq1$, $y\geqq1$ であるから、 $9k+10\geqq1$, $4k+5\geqq1$　これを解くと $-1\leqq k\leqq1$

これを満たす整数 k は　$k=-1,0,1$ であり, ③から　$(x, y)=(19, 1), (10, 5), (1, 9)$

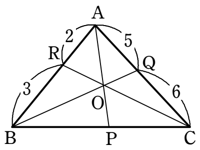
したがってアメとチョコの個数は,

それぞれ19個、1個 または10個、5個または1個、9個 ⑩

※波線部がない場合は加点しない

[$\beta-3$] 平面図形　(1)(2)各 5 点, (3) 10 点

(1)　△ABC にチェバの定理を用いると



$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

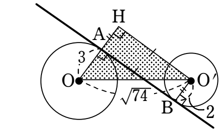
すなわち　$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{2}{3}=1$

$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{5}{4}$ より　BP : PC= $\underline{\underline{5:4}}$

(2)　直線 AB は 2 つの円 O，O′ の共通接線であるから

OA⊥AB，O′B⊥AB

ゆえに，点 O′ から直線 OA に垂線 O′H を下ろすと，四 角形 ABO′H は長方形となる。



よって　AB＝HO′，AH＝BO′＝2

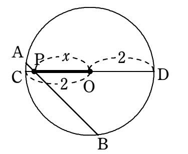
ゆえに　OH＝OA＋AH＝3＋2＝5

△OO′H に三平方の定理を適用すると

$$O'H=\sqrt{\sqrt{74}^{\,2}-5^2}=\sqrt{49}=7$$

よって　AB ＝$\underline{\underline{7}}$

(3)　右図のように，直線 OP と円 O との交点を C，D とおく。



線分 OC，OD は円 O の半径であるから

OC＝OD＝2

線分 OP の長さを x とおくと,

PC＝OC−OP＝$2-x$，PD＝OD＋OP＝$2+x$ △3

方べきの定理により

PC・PD＝PA・PB＝1 △6

であるから,

$(2-x)(2+x)=1$　すなわち　$3-x^2=0$

この 2 次方程式を解くと， $x=\pm\sqrt{3}$

$x>0$ であるから，OP ＝ x ＝ $\sqrt{3}$ ⑩

[$\beta-4$] 2次関数　(1)(2)各 5 点, (3) 10 点

(1)　$f(a+1)=a^2+6a+7$

$f(a+1)=(a+1)^2+4(a+1)+2$

$=a^2+2a+1+4a+4+2$

$=\underline{\underline{a^2+6a+7}}$

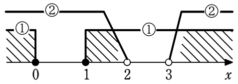
(2)　$\begin{cases} x^2 \geqq x & \cdots\cdots ① \\ 5x < x^2+6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ とおく。

① から　$x(x-1)\geqq 0$　　よって　$x\leqq 0,\ 1\leqq x$

② から　$(x-2)(x-3)>0$　　よって　$x<2,\ 3<x$

① と ② の共通範囲を求めて

$\underline{\underline{x\leqq 0,\ 1\leqq x<2,\ 3<x}}$



(3)　$f(x)=-2x^2+4x-2$ とおく。

$f(x)=-2x^2+4x-2=-2(x^2-2x+1)=-2(x-1)^2$

$y=-2x^2+4x-2$ のグラフは上に凸の放物線で,

軸の方程式は直線 $x=1$，頂点は $(1,0)$ であり,

$f(a)=-2a^2+4a-2$

$f(a+2)=-2(a+2)^2+4(a+2)-2$

$=-2(a^2+4a+4)+4(a+2)-2$

$=-2a^2-4a-2$

[1]　$a+2<1$　すなわち　$a<-1$ のとき

図 [1] から，$f(x)$ は $x=a+2$ で

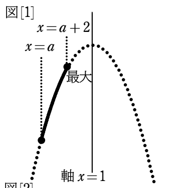
最大値 $f(a+2)=-2a^2-4a-2$ をとる。

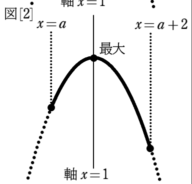
[2]　$a\leqq 1\leqq a+2$　すなわち　$-1\leqq a\leqq 1$ のとき

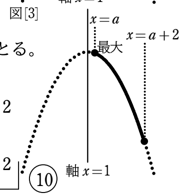
図 [2] から，$f(x)$ は $x=1$ で最大値 $f(1)=0$ をとる。

[3]　$1<a$ のとき

図 [3] から，$f(x)$ は $x=a$ で最大値 $f(a)=-2a^2+4a-2$ をとる。







以上から　$\begin{cases} a<-1 & \text{のとき } x=a+2 \text{ で最大値 } -2a^2-4a-2 \\ -1\leqq a\leqq 1 & \text{のとき } x=1 \text{ で最大値 } 0 \\ 1<a & \text{のとき } x=a \text{ で最大値 } -2a^2+4a-2 \end{cases}$　10

※途中点

[1]～[3]のうちいずれか 1 つで　3

[1]～[3]のうちいずれか 2 つで　6

[$\beta-5$] 図形と計量　(1)(2)各 5 点, (3) 10 点

(1)　$3\tan\theta+\sqrt{3}=0$ を変形すると，$\tan\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$0°\leqq\theta\leqq 180°$ の範囲でこの等式を満たす θ は，$\theta=\underline{\underline{150°}}$

(2)　$\angle\mathrm{APB}=180°-(45°+75°)=60°$

$\triangle\mathrm{PAB}$ において，正弦定理により

$\dfrac{\mathrm{PB}}{\sin\angle\mathrm{PAB}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{APB}}$

$\dfrac{\mathrm{PB}}{\sin 45°}=\dfrac{180}{\sin 60°}$

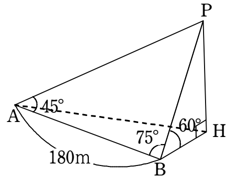
$\mathrm{PB}\sin 60°=180\sin 45°$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{PB}=180\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\mathrm{PB}=60\sqrt{6}$

また，$\triangle\mathrm{PBH}$ において，$\mathrm{PH}=\mathrm{PB}\sin 60°$ であるから,

$\mathrm{PH}=60\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\underline{\underline{90\sqrt{2}\ (\mathrm{m})}}$



(3)　線分 AD は $\angle\mathrm{A}$ の二等分線であるから,

$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{DAC}=30°$

また，$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ADC}$　であるから,

$\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin 60°=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cdot\sin 30°+\dfrac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin 30°$　6

3

$7\cdot 5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=7\mathrm{AD}\cdot\dfrac{1}{2}+\mathrm{AD}\cdot 5\cdot\dfrac{1}{2}$

$12\mathrm{AD}=35\sqrt{3}$

$\mathrm{AD}=\dfrac{35\sqrt{3}}{12}$　10