[共通問題]各４点　×15 題　計 60 点

(1)　$x^6-64=(x^3-8)(x^3+8)=\boldsymbol{(x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4)}$

(2)　$a:b:c=1:2:3$ より，$t\neq 0$ に対して $a=t,\ b=2t,\ c=3t$ とおくと，

(与式) $\Leftrightarrow 3\cdot t+2\cdot 2t+1\cdot 3t=20$

これを解いて，　$t=2$　　ゆえに，$\boldsymbol{a=2}$

(3)　$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6C_r\cdot(2x)^{6-r}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r r\cdot(-1)^r\cdot x^{6-2r}$$

定数項は　$6-2r=0$　のときで　$r=3$

よって定数項は　$\boldsymbol{{}_6\mathrm{C}_3\cdot 2^3\cdot(-1)^{6-3}=-160}$

(4)　$x=1-2i$ から　$x^3+ax+b=0$ に代入すると

$$(1-2i)^3+a(1-2i)+b=0$$
$$(1-6i-12+8i)+a-2ai+b=0$$
$$(-11+a+b)+(2-2a)i=0$$

実数 $x,\ y$ に対して $x+yi=0 \Leftrightarrow x=0,\ y=0$ であるから，

$$-11+a+b=0,\quad 2-2a=0$$

これを解いて，$a=1,\ b=10$

ゆえに，方程式 $x^3+x+10=0$ を解けばよい

$$x^3+x+10=0$$
$$(x+2)(x^2-2x+5)=0$$

よって，$x=-2$，$x^2-2x+5=0$

２次方程式 $x^2-2x+5=0$ を解いて，

$$x=1\pm 2i$$

以上より，他の解は　$\boldsymbol{-2,\ 1+2i}$

別解　実数係数の n 次方程式が複素数解をもつとき，その共役複素数も解である

したがって，a,b が実数であるから $x=1+2i$ も解である

３次方程式 $x^3+ax+b=0$ は $x=1\pm 2i$ を解にもつから，

$$x-1=\pm 2i \Leftrightarrow (x-1)^2=-4$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+5=0$$

より，x^2-2x+5 で割り切れる

もうひとつの解を α とすると，　$(x-\alpha)(x^2-2x+5)=x^3+ax+b$

左辺を展開して係数比較することで，

$$-2-\alpha=0,\quad 2\alpha+5=a,\quad -5\alpha=b$$

したがって，$\alpha=-2$，$a=1$，$b=10$

以上より，他の解は $\boldsymbol{1+2i,\ -2}$

(5)　$P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とする

このとき，　$P(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b$

$P(x)$ を $x-2$，$x+3$ で割った余りがそれぞれ５，10 であるから，

$$P(2)=2a+b=5,$$
$$P(-3)=-3a+b=10$$

したがって，$a=-1$，$b=7$

以上より，　$\boldsymbol{-x+7}$

(6)　$P(x)=x^3-6x^2+21x-26$ とおくと，

$P(2)=0$ であるから，

まずは１とか２とか -1 とか色々代入してみる。
候補は定数項の約数（正負とも）

因数定理より $P(x)$ は $x-2$ で割り切れて，

$$P(x)=(x-2)(x^2-4x+13)$$

$(x-2)(x^2-4x+13)=0$ より，

$x=2$，$x^2-4x+13=0$

２次方程式 $x^2-4x+13=0$ を解いて，

$$x=2\pm 3i$$

したがって，$\boldsymbol{x=2,\ 2\pm 3i}$

(7)　点 B の座標を (a,b) とすると，A $(1,\ 2)$ より，

線分 AB の中点 M の座標は $\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b+2}{2}\right)$ である

この点 M が直線 $x+2y-10=0$ 上にあるので，

$$\frac{a+1}{2}+2\cdot\frac{b+2}{2}-10=0 \quad\text{よって}\quad a+2b=15\ \cdots\cdots①$$

また，直線の傾きは $-\dfrac{1}{2}$，直線 AB の傾きは $\dfrac{b-2}{a-1}$ である

この２直線は互いに垂直なので，$-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{b-2}{a-1}=-1$

よって　　$2a-b=0\ \cdots\cdots②$

①，② より連立方程式を解いて　　$a=3,\ b=6$

したがって，**B (3，6)**

(8)　直線の方程式は $2x-y+k=0$

与えられた直線と円が共有点をもつのは，

円の中心と直線の距離 d が半径以下であるときである．

円の中心は $(0,0)$，半径は１であるから，　$d\leqq 1$

$$\frac{|2\cdot 0-1\cdot 0+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}\leqq 1 \quad\text{よって}\quad |k|\leqq\sqrt{5}$$

したがって　　$\boldsymbol{-\sqrt{5}\leqq k\leqq\sqrt{5}}$

(9)　P の座標を $(x,\ y)$ とする

AP : BP $=2:1$ より AP $=2$ BP

これは，AP, BP はともに正であるから　$\mathrm{AP}^2=4\,\mathrm{BP}^2$

これより $x^2+(y-8)^2=4\{x^2+(y-2)^2\}$

$$3x^2+3y^2-48=0$$
$$x^2+y^2=16\ \cdots\cdots①$$

したがって，与えられた条件を満たす点 P は①上にあり，

①上の任意の点は与えられた条件を満たす

よって，求める軌跡は　**中心が原点，半径が４の円**

(10)　$\sqrt{1^2+\sqrt{3}^{\,2}}=\sqrt{4}=2$ であるから，$r=2$

与えられた式を２でくくると，

$$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\left(-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\right\}$$

このとき，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$ となる α は $\alpha=\dfrac{11}{6}\pi$ であるから，

$$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\cos\frac{11}{6}\pi\cos\theta-\sin\frac{11}{6}\pi\sin\theta\right)$$
$$\boldsymbol{=2\cos\left(\theta+\frac{11}{6}\pi\right)}$$

(11)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を２乗して，

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$
$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$

したがって　　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ であるから

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{9}{16}\boldsymbol{=\frac{11}{16}}$$

(12)　$\sqrt[3]{a^3b^4}\times\sqrt{ab^3}\div\sqrt{a\sqrt[3]{b^5}}=a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{4}{3}}\times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}\div a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}}$

$$=a^{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-\frac{5}{6}}\boldsymbol{=ab^2}$$

(13)　$4^{-\log_2 3}\times 5^{3\log_5 3}=2^{-2\log_2 3}\times 5^{3\log_5 3}$

$$=2^{\log_2\frac{1}{9}}\times 5^{\log_5 27}$$
$$=\frac{1}{9}\times 27\boldsymbol{=3}$$

(14)　$f(x)=x^2-5x$ とする

$f'(x)=2x-5$ であるから，$(t,\ f(t))$ における放物線の接線は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$
$$y-(t^2-5t)=(2t-5)(x-t)$$
$$y=(2t-5)x-t^2\ \cdots\cdots①$$

これが点 $(2,\ -7)$ を通るから，

$$-7=(2t-5)\cdot 2-t^2$$
$$t^2-4t+3=0$$
$$(t-1)(t-3)=0$$

したがって　　$t=1,\ 3$

よって　　$\boldsymbol{t=1}$ **のとき，**$\boldsymbol{y=-3x-1}$

$\boldsymbol{t=3}$ **のとき，**$\boldsymbol{y=x-9}$

(15)　$\displaystyle\int_{-1}^{0}(x^2+1)(x+3)dx+\int_{0}^{1}(x^2+1)(x+3)dx$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2+1)(x+3)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^3+3x^2+x+3)\ dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(3x^2+3)\ dx$$
$$=2\Big[x^3+3x\Big]_0^1$$
$$\boldsymbol{=8}$$

[β－1 三角関数]　(1), (2) 各５点, (3)(ア) ３点, (イ) ７点

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{3} \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{13\pi}{3}$ ……① である

$\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たすのは

$$2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ \frac{2\pi}{3} + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

このうち ① を満たすのは，

$$2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{7\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3}$$

したがって

$$\boldsymbol{\theta = 0,\ \frac{\pi}{6},\ \pi,\ \frac{7\pi}{6}}$$

(2)　x 軸正の向きと $y = -2x$，$y = mx$ それぞれのなす角を α, β とすると，

$$\tan\alpha = -2,\ \tan\beta = m$$

条件より

$$\tan(\alpha - \beta) = \pm 1$$

$$\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{-2-m}{1-2m} = \pm 1$$

$\dfrac{-2-m}{1-2m} = 1$ のとき，$(2m-1) - 2 - m = 0$

$$m = 3$$

$\dfrac{-2-m}{1-2m} = -1$ のとき，$(2m-1) + 2 + m = 0$

$$m = -\frac{1}{3}$$

m は正の定数より　**$m = 3$**

(3)(ア)　$t = \sin\theta + \cos\theta$ より　両辺を２乗して

$$t^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$$
$$= 1 + 2\sin\theta\cos\theta$$

よって　$2\sin\theta\cos\theta = t^2 - 1$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$　から　$\sin 2\theta = t^2 - 1$

これを $y = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta + \sin\theta + \cos\theta + 3$ に代入して，

$y = \dfrac{t^2-1}{2} + t + 3$　　ゆえに　$\boldsymbol{y = \dfrac{1}{2}t^2 + t + \dfrac{5}{2}}$ ……①

(イ)　$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta + \alpha)$

ただし $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$　であるから

$t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ ……②　　3

$y = \dfrac{1}{2}t^2 + t + \dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{2}(t+1)^2 + 2$　より　5

$t = \sqrt{2}$，すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，最大値 $y = \dfrac{7}{2} + \sqrt{2}$

$t = -1$，すなわち $\theta = \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ のとき，最小値 $y = 2$　　7

[β－2 Ⅱ指数関数・対数関数]　(1), (2) 各５点, (3)(ア) ３点, (イ) ７点

(1)　$3^x - 3^{-x} = 8$　の両辺を２乗すると　$3^{2x} - 2 + 3^{-2x} = 64$

よって　$3^{2x} + 3^{-2x} = 66$

両辺に２を足して　$3^{2x} + 2 + 3^{-2x} = 68$

左辺を因数分解すると　$(3^x + 3^{-x})^2 = 68$

$3^x > 0$, $3^{-x} > 0$ より　$3^x + 3^{-x} > 0$　であるから　$3^x + 3^{-x} = \sqrt{68} = \boldsymbol{2\sqrt{17}}$

別解　$t = 3^x$ とすると，$t - \dfrac{1}{t} = 8$　分母を払って整理すると　$t^2 - 8t - 1 = 0$

これを解いて，$t = 4 \pm \sqrt{17}$　　$t = 3^x > 0$ であるから　$t = 4 + \sqrt{17}$

したがって，$\left(t + \dfrac{1}{t}\right) + \left(t - \dfrac{1}{t}\right) = 2t$　　$\left(t + \dfrac{1}{t}\right) + 8 = 8 + 2\sqrt{17}$

よって，$\boldsymbol{t + \dfrac{1}{t} = 2\sqrt{17}}$

(2)　$\log_4(x^2+1) = \dfrac{\log_2(x^2+1)}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2(x^2+1)}{2}$ である

また，真数条件より $x^2 + 1 > 0$ かつ $x > 0$ より $x > 0$

$\dfrac{1}{2}\log_2(x^2+1) - \log_2 x = 1$

$$\log_2(x^2+1) = \log_2 x^2 + \log_2 2^2$$
$$x^2 + 1 = x^2 \times 4$$
$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$x > 0$ より $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3)(ア)　$4\log_9 x^2 = 4 \times 2 \times \dfrac{\log_3 x}{\log_3 9} = 4\log_3 x$ であるから

$$\boldsymbol{y = t^2 - 4t - 1}$$

(イ)　$y = t^2 - 4t - 1 = (t-2)^2 - 5$　3

$1 \leqq x \leqq 27$ で，底３は１より大きいから

$\log_3 1 \leqq \log_3 x \leqq \log_3 27$　　**$0 \leqq t \leqq 3$**　5

$t = 0$，すなわち **$x = 1$ のとき最大値 -1**

$t = 2$，すなわち **$x = 9$ のとき最小値 -5**　　7

[β－3 Ⅱ微分・積分の考え]　(1), (2) 各５点, (3)(ア) ３点, (イ) ７点

(1)　$y = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ であるから，

$$\boldsymbol{y' = 24x^2 + 24x + 6}$$

別解　$\{(ax+b)^n\}' = na(ax+b)$ であるから

$$y' = 3 \cdot 2(2x+1)^2 = 6(4x^2 + 4x + 1) = \boldsymbol{24x^2 + 24x + 6}$$

(2)　$\displaystyle\int_0^2 f(t)dt = a$ とおくと，$f(x) = 3x^2 + a$

よって　$\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^2 (3t^2 + a)dt = \Big[t^3 + at\Big]_0^2 = 2a + 8$

ゆえに　$2a + 8 = a$ から　$a = -8$

したがって　$\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 8}$

(3)(ア)　C: $y = -x^2 - 4x$ と ℓ: $y = ax$ の共有点の x 座標は，

方程式 $-x^2 - 4x = ax$ の解である。これを解くと

$x(x + 4 + a) = 0$ より　$x = 0,\ -a-4$

$-4 < a < 0$ より $-a - 4 < 0$

求める面積は　$\displaystyle S_1 = \int_{-a-4}^{0} \{(-x^2 - 4x) - ax\}dx$

$$= \int_{-a-4}^{0} \{-x^2 - (a+4)x\}\,dx$$
$$= \int_0^{-(a+4)} \{x^2 + (a+4)x\}\,dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{(a+4)}{2}x^2\right]_0^{-(a+4)}$$
$$= -\frac{(a+4)^3}{3} + \frac{(a+4)^3}{2}$$
$$= \frac{(a+4)^3}{6}$$

別解　$\displaystyle S_1 = \int_{-a-4}^{0} (x-0)\{x - (-a-4)\}dx = \frac{1}{6}(a+4)^3$

(イ)　C と x 軸の交点の x 座標は 0, -4 であるから，

$$S_1 + S_2 = \int_{-4}^{0} \{(-x^2 - 4x) - 0\}dx$$
$$= \int_0^{-4} (x^2 + 4x)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^{-4}$$
$$= -\frac{64}{3} + 32$$
$$= \frac{32}{3}$$

3

$S_1 = S_2$ より，$2S_1 = \dfrac{32}{3}$ であるから　5

$2 \cdot \dfrac{1}{6}(a+4)^3 = \dfrac{32}{3}$ より　$(a+4)^3 = 32$

$a + 4 = \sqrt[3]{32}$　　7

よって　**$a = -4 + 2\sqrt[3]{4}$**

別解　$\displaystyle S_1 = \int_{-4}^{0} \{(-x^2 - 4x) - 0\}dx = -\int_{-4}^{0} (x-0)\{x - (-4)\}dx = \frac{4^3}{6} = \frac{32}{3}$

補足　$2\sqrt[3]{4} = 2^{\frac{5}{3}}$ であるから $0 < 2^{\frac{5}{3}} < 4$

ゆえに　$-4 < -4 + 2\sqrt[3]{4} < 0$ をみたす。

[$\beta-4$ B 数列]　(1)，(2) 各５点，(3)(ア) ３点，(イ) ７点

(1)　この数列の初項を a，公差を d とすると　$a_n=a+(n-1)d$

第４項が 14 であるから　$a+3d=14$　……①

第 10 項が 62 であるから　$a+9d=62$　……②

①，② を解いて　$a=-10$，$d=8$

よって，一般項は　$a_n=-10+(n-1)\cdot 8=8n-18$

(2)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。

階差数列 $\{b_n\}$ は

$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ \cdots\cdots$

となり，これは初項 2，公比 3 の等比数列である。

よって　$b_n=2\cdot 3^{n-1}$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot 3^{k-1}=4+\frac{2(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

すなわち　$a_n=3^{n-1}+3$　……①

① で $n=1$ とすると $a_1=4$ が得られるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=3^{n-1}+3$

(3)(ア)　$a_n\fallingdotseq 0$ であるから，漸化式の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n}+1$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n+1$，$b_1=1$

(イ)　$b_{n+1}=3b_n+1$ を変形すると

$$b_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(b_n+\frac{1}{2}\right)$$　3

また　$b_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

よって，数列 $\left\{b_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $\dfrac{3}{2}$，公比 3 の等比数列で

$$b_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot 3^{n-1}$$

したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n=\frac{3^n-1}{2}$$　5

$a_n=\dfrac{1}{b_n}$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\frac{2}{3^n-1}$$　7

[$\beta-5$ B 統計的な推測]　(1)，(2) 各５点，(3)(ア) ３点，(イ) ７点

(1)　確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき

X の平均は np　X の標準偏差は $\sqrt{np(1-p)}$ であるから，

平均は $1800\times\dfrac{1}{3}=\mathbf{600}$，　標準偏差は $\sqrt{1800\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}}=\sqrt{400}=\mathbf{20}$

(2)　100円硬貨を３回投げたときに表が出る枚数を X，

10円硬貨を４回投げたときに表が出る枚数を Y とすると，

もらえる金額 Z 円は，$Z=100X+10Y$ を満たす。

$$E(X)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\quad E(Y)=4\times\frac{1}{2}=2$$

であるから，平均は

$$E(Z)=E(100X+10Y)=100\times\frac{3}{2}+10\times 2=\mathbf{170}$$

また，

$$E(X^2)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+4\times\frac{3}{8}+9\times\frac{1}{8}=3$$

$$E(Y^2)=0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{4}{16}+4\times\frac{6}{16}+9\times\frac{4}{16}+16\times\frac{1}{16}=5$$

であるから

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$$

$$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=5-2^2=1$$

さらに $X,\ Y$ は独立であるから，分散は

$$\begin{aligned}V(Z)&=V(100X+10Y)\\&=V(100X)+V(10Y)\\&=100^2V(X)+10^2V(Y)=\mathbf{7600}\end{aligned}$$

(3)(ア)　$$\boldsymbol{p_0-1.96\times\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\leqq p\leqq p_0+1.96\times\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

(イ)　$p_0=0.02$ より，

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{0.02\times 0.98}{9600}}&=\frac{0.02\times 7}{40\sqrt{6}}\\&=\frac{2\times 7}{40\times 245}=\frac{1}{100\times 7}\\&=\frac{1}{700}\end{aligned}$$　3

したがって　$1.96\times\dfrac{1}{700}=0.0028$　5

以上より不良品率 p は

$0.02-0.0028\leqq p\leqq 0.02+0.0028$

$\mathbf{0.0172\leqq p\leqq 0.0228}$ または $[\ \mathbf{0.0172\ ,\ 0.0228}\ ]$　7

[$\beta-6$ C ベクトル]　(1)，(2) 各５点，(3)(ア) ３点，(イ) ７点

(1)　2 直線 $3x-y-6=0$，$x-2y+4=0$ の法線ベクトルをそれぞれ $\vec{m}$，$\vec{n}$ とすると，

$\vec{m}=(3,\ -1)$，$\vec{n}=(1,\ -2)$

$|\vec{m}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$，$|\vec{n}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$，

内積 $\vec{m}\cdot\vec{n}=3\cdot 1+(-1)\cdot(-2)=5$　であるから，

$$\cos\alpha=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって，$0\leqq\alpha<\pi$ であるから　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{\pi}{4}}$

(2)　$0<t<1$ に対して，$\mathrm{LP:PM}=t:(1-t)$ とすると，P は LM の内分点であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OL}}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=\frac{2(1-t)}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2t}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \cdots\cdots①\end{aligned}$$

また，$0<k<1$ に対して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=k\overrightarrow{\mathrm{ON}}\\&=k\times\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}=\frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \cdots\cdots②\end{aligned}$$

①，②と，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$\frac{2(1-t)}{3}=\frac{k}{2}\ \text{かつ}\ \frac{2t}{5}=\frac{k}{2}$$

これを解くと　$k=\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{5}{8}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}}$

(3)(ア)　$\vec{a}\perp\vec{p}$ であることは $\vec{a}\cdot\vec{p}=0$ であることと同値であるから，

$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{p}=x+2y+6z=0}$　……①

(イ)（ア）同様にして

$\vec{b}\perp\vec{p}$ より，$\vec{b}\cdot\vec{p}=-x+y=0$　……②　3

②より　$y=x$　……③

これを①に代入して，$z=-\dfrac{1}{2}x$　……④

また，$|\vec{p}|=3$ であるから，$|\vec{p}|^2=9$　$x^2+y^2+z^2=9$　……⑤　5

③，④，⑤から　$x^2+x^2+\left(-\dfrac{1}{2}x\right)^2=9$　$\dfrac{9}{4}x^2=9$　$x=\pm 2$

$x=2$ のとき，$y=2$，$z=-1$

$x=-2$ のとき，$y=-2$，$z=1$

以上より　$\boldsymbol{\vec{p}=(\ 2\ ,\ 2\ ,\ -1\ )\ ,\ (\ -2\ ,\ -2\ ,\ 1\ )}$　7