



S II α 学力テスト 解答用紙

(平成16年11月19日実施)

[$\alpha-1$] から [$\alpha-16$] までの16群のうちから、
学校で指定された4群を解答すること。

各5点

第	学年	組	番	氏名		得点	100
---	----	---	---	----	--	----	-----

[$\alpha-1$]	(1)	(2) 商 余り	(3) $x =$	(4)	(5)	25
[$\alpha-2$]	(1)	(2) (,)	(3)	(4)	(5)	25
[$\alpha-3$]	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	25
[$\alpha-4$]	(1)	(2) $x =$	(3)	(4)	(5) $< x <$	25
[$\alpha-5$]	(1) $y' =$	(2)	(3)	(4)	(5)	25
[$\alpha-6$]	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	25
[$\alpha-7$]	(1) (,)	(2) (,)	(3)	(4) 中心 (,) 半径	(5)	25
[$\alpha-8$]	(1)	(2)	(3)	(4) $\leq y \leq$	(5)	25
[$\alpha-9$]	(1)	(2) , ,	(3) $x =$	(4)	(5)	25
[$\alpha-10$]	(1)	(2)	(3)	(4) $AB =$	(5)	25
[$\alpha-11$]	(1) { }	(2) 個	(3)	(4)	(5) 人	25
[$\alpha-12$]	(1) 通り	(2) 通り	(3)	(4)	(5) 点	25
[$\alpha-13$]	(1) 項	(2) 通り	(3) 通り	(4) 個	(5)	25
[$\alpha-14$]	(1)	(2)	(3)	(4) $x =$	(5)	25
[$\alpha-15$]	(1) $y =$	(2) (,)	(3) 最大値 最小値	(4)	(5)	25
[$\alpha-16$]	(1) $\cos A =$	(2) $AC =$	(3)	(4) $\triangle ABC : \triangle A'B'C' =$:	(5) $AC =$	25



S II β 学力テスト 解答用紙

(平成16年11月19日実施)

β 共通問題

第	学年	組	番	氏名		得点	100
---	----	---	---	----	--	----	-----

(1)	5点	(2) $a =$, $b =$	5点	(3)	5点
(4) $a =$, $b =$	5点	(5)	5点	(6) (,)	5点
(7) (ア)	3点	(8) (ア)	3点		
(7) (イ)	7点	(8) (イ)	7点		
				50点	

β 選択問題 [β-1] から [β-13] までの 13 群のうち、学校で指定された 2 群の番号を に番号順に記入し、解答すること。

β -	(1)	(2)	(3)
	(4)	(5)	25点
β -	(1)	(2)	(3)
	(4)	(5)	25点

S II α 学力テスト 正答表

(平成16年11月19日実施)

[$\alpha-1$] から [$\alpha-16$] までの16群のうちから、
学校で指定された4群を解答すること。
各5点

第	学年	組	番	氏名	得点	100
---	----	---	---	----	----	-----

[$\alpha-1$]	(1) $5+5i$	(2) 商 $2x-3$ 余り $-x$	(3) $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$	(4) 1	(5) $x^2 - 2x + 2 = 0$	25
[$\alpha-2$]	(1) $\sqrt{34}$	(2) (5, 2)	(3) $y = 3x - 1$	(4) $x - 2y + 3 = 0$	(5) $x^2 + y^2 \leq 4$	25
[$\alpha-3$]	(1) $\frac{3}{4}\pi$	(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	(3) ①, ③	(4) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$	(5) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	25
[$\alpha-4$]	(1) -4	(2) $x = -3$	(3) 2	(4) $2a + b$	(5) $0 < x < 9$	25
[$\alpha-5$]	(1) $y' = 3x^2 - 4x + 9$	(2) -3	(3) $y = 4x - 2$	(4) $\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 4x + C$	(5) $\frac{8}{3}$	25
[$\alpha-6$]	(1) $\frac{4b^3}{3a}$	(2) 5	(3) 6	(4) $(x+1)(x-2)(x-5)$	(5) $k > \frac{9}{4}$	25
[$\alpha-7$]	(1) (-2, 16)	(2) (1, 5)	(3) ③	(4) 中心 (5, -6) 半径 8	(5) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$	25
[$\alpha-8$]	(1) 30°	(2) $\frac{\pi}{4}$	(3) ③	(4) $1 \leq y \leq 3$	(5) $-\frac{3}{8}$	25
[$\alpha-9$]	(1) 5	(2) $\sqrt[4]{32}, \sqrt[3]{16}, \sqrt{8}$	(3) $x = \frac{1}{2}$	(4) $x \leq 4$	(5) 4	25
[$\alpha-10$]	(1) (ア), (イ)	(2) 10	(3) 67°	(4) $AB = 4$	(5) $x = 1, 9$	25
[$\alpha-11$]	(1) {1, 2, 3, 6}	(2) 26 個	(3) (ウ), (エ)	(4) (ア)	(5) 15 人	25
[$\alpha-12$]	(1) 24 通り	(2) 840 通り	(3) $\frac{1}{4}$	(4) $\frac{16}{21}$	(5) $\frac{50}{3}$ 点	25
[$\alpha-13$]	(1) 9 項	(2) 1440 通り	(3) 126 通り	(4) 243 個	(5) 40	25
[$\alpha-14$]	(1) $a^3 + 3a^2 - 19a + 3$	(2) $x > 1$	(3) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$	(4) $x = 8$	(5) -3	25
[$\alpha-15$]	(1) $y = 8$	(2) (3, 2)	(3) 最大値 16 最小値 4	(4) $x < 4, 7 < x$	(5) $m < 2$	25
[$\alpha-16$]	(1) $\cos A = \frac{5}{6}$	(2) $AC = \sqrt{51}$	(3) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$	(4) $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = 4 : 9$	(5) $AC = 2$	25



S II β 学力テスト正答表 (平成16年11月19日実施)

β 共通問題

第 学年 組 番	氏 名	得 点	100
----------	-----	-----	-----

(1) 1	5点	(2) $a = 2, b = -1$	5点	(3) $x^2 + 2x + 4 = 0$	5点
(4) $a = 10, b = 5$	5点	(5) $3x - y - 1 = 0$	5点	(6) $(3, 4)$	5点
(7) (ア) $a^2 + \frac{4}{a^2} + 5$	3点	(8) (ア) $2x + \sqrt{5}y = 9$	3点		
(7) (イ) $a > 0$ より $a^2 > 0, \frac{4}{a^2} > 0$ であるから、 相加平均と相乗平均の関係により $\frac{a^2 + \frac{4}{a^2}}{2} \geq \sqrt{a^2 \times \frac{4}{a^2}}$ したがって $a^2 + \frac{4}{a^2} \geq 4$ $\triangle$ 両辺に5を加えて $a^2 + \frac{4}{a^2} + 5 \geq 4 + 5$ よって、(ア)より $\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a + \frac{4}{a}\right) \geq 9$ $\triangle$ ここで、等号が成り立つのは $a^2 = \frac{4}{a^2}$ 、 すなわち $a^4 = 4$ のときである。 すると、 $a > 0$ より $a = \sqrt{2}$ よって <u>最小値は 9</u> <u>そのときの a の値は $\sqrt{2}$</u> $\textcircled{7}$		(8) (イ) $l: 2x + \sqrt{5}y = 9$ を変形して $2x + \sqrt{5}y - 9 = 0$ よって、円の中心 $(3, 0)$ と 直線 l との距離は $\frac{ 2 \times 3 + \sqrt{5} \times 0 - 9 }{\sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2}} \triangle$ $= \frac{ 6 - 9 }{\sqrt{4 + 5}} = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$ $\triangle$ したがって、求める円の半径は1である。 円の中心が点 $(3, 0)$ 、であるから、 その方程式は <u>$(x - 3)^2 + y^2 = 1$</u> $\textcircled{7}$			
7点		7点			

50点

β 選択問題

[β-1] から [β-13] までの8群のうち、学校で指定された2群の番号を ☐ に番号順に記入し、解答すること。

β-1	(1) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	(2) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$	(3) $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$	
各5点	(4) $\sqrt{2}$	(5) $\frac{\pi}{3}$		25点
β-2	(1) a^2	(2) $x = 0$	(3) -2	
各5点	(4) $-a + b + 1$	(5) $x = 5$		25点

β-3	(1) $\frac{8}{3}$	(2) $y = -4x - 1$	(3) $a = -2$	
各5点	(4) $-2 < a < 2$	(5) $S = \frac{1}{3}$		25点
β-4	(1) $(x+1)(x-2)(x-5)$	(2) $k > \frac{5}{4}$	(3) $a = -6, b = 12$	
各5点	(4) $a = 1, b = 1, c = -2$	(5) $-4 - 3i$		25点
β-5	(1) 10	(2) $a = 4, b = 1$	(3) $\begin{cases} x + 2y + 5 = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \text{ 6可} \end{cases}$	
各5点	(4) $-5 \leq k \leq 5$	(5) $r = \sqrt{13} \pm 3$		25点
β-6	(1) 2π	(2) $-\frac{3}{8}$	(3) 1	
各5点	(4) $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$	(5) $2 \leq y \leq 4$		25点
β-7	(1) $a^{\frac{2}{3}}$	(2) $2^{-3}, \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \left(\frac{1}{8}\right)^{-1}$	(3) $x > 1$	
各5点	(4) $x = 0, 2$	(5) 最大値 4 ($x = 1$ のとき)		25点
β-8	(1) AB, BC, CA	(2) 23°	(3) 130°	
各5点	(4) $DH = 2$	(5) $1 < x < 9$		25点
β-9	(1) {3, 7, 13}	(2) {2, 4, 6, 7, 9}	(3) (イ)	
各5点	(4) 15 人	(5) 「 $x^2 - 2x \geq 0$ ならば $x \geq 2$ である。」 偽		25点
β-10	(1) 48 通り	(2) 21 通り	(3) $\frac{5}{6}$	
各5点	(4) $\frac{40}{243}$	(5) $\frac{110}{3}$ 点		25点
β-11	(1) 12 個	(2) 48 個	(3) 126 通り	
各5点	(4) 12 通り	(5) 40		25点
β-12	(1) 初項 -10, 公差 7	(2) 第 28 項	(3) -2	
各5点	(4) $n(n+1)^2$	(5) $a_n = 3 \cdot 4^{n-1} - 1$		25点
β-13	(1) $m = 3, n = -4$	(2) $p = 1$	(3) -12	
各5点	(4) $-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$	(5) $\frac{\sqrt{34}}{2}$		25点

[α - 1] 式と証明・高次方程式

- (1) $(1+2i)(3-i) = 3-i+6i-2i^2$
 $= 3-i+6i+2 = \underline{5+5i}$
- (2)
$$\begin{array}{r} 2x-3 \\ x^2-x+1 \overline{) 2x^3-5x^2+4x-3} \\ \underline{2x^3-2x^2+2x} \\ -3x^2+2x-3 \\ \underline{-3x^2+3x-3} \\ -x \\ \underline{-x} \\ 0 \end{array}$$

 商 $2x-3$ 余り $-x$
- (3) 解の公式より,

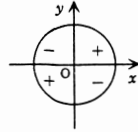
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$
- (4) $\frac{a-b}{a+b} \times \frac{a^2-b^2}{(a-b)^2} = \frac{a-b}{a+b} \times \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}$
 $= \frac{1}{1}$
- (5) 和: $(1+i)+(1-i) = 2$
 積: $(1+i)(1-i) = 1-i^2 = 2$
 よって, 求める2次方程式は, $\underline{x^2-2x+2=0}$

[α - 2] 図形と方程式

- (1) $AB = \sqrt{(-1-2)^2 + \{2-(-3)\}^2}$
 $= \sqrt{9+25} = \underline{\sqrt{34}}$
- (2) 内分点の公式より,
 $\frac{1 \times 3 + 2 \times 6}{2+1} = 5, \frac{1 \times (-2) + 2 \times 4}{2+1} = 2$
 よって, $\underline{(5, 2)}$
- (3) 求める直線の方程式を
 $y = 3x+n$ とする。
 点 $(1, 2)$ を通るから,
 $2 = 3 \times 1 + n$ よって, $n = -1$
 したがって, $\underline{y = 3x-1}$
- (4) $P(x, y)$ とする。
 $AP = BP$ より $AP^2 = BP^2$
 $x^2 + (y-4)^2 = (x-2)^2 + y^2$
 よって, $\underline{x-2y+3=0}$
- (5) 原点中心, 半径2の円の内部で, 境界を含むから,
 $\underline{x^2+y^2 \leq 4}$

[α - 3] 三角関数

- (1) $135^\circ = \frac{\pi}{180} \times 135 = \underline{\frac{3}{4}\pi}$
- (2) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos(-30^\circ) = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$
- (3) $\tan \theta > 0$ より θ は第1象限の角または第3象限の角である。
 よって, $\underline{\textcircled{1}, \textcircled{3}}$
- (4) θ が第3象限の角だから,
 $\cos \theta < 0$
- $\cos \theta = -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = \underline{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$
- (5) 三角関数の加法定理より,
 $\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ)$
 $= \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$



[α - 4] 指数関数・対数関数

- (1) $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = \underline{-4}$
- (2) $3^x = \frac{1}{27}$
 $3^x = 3^{-3}$
 指数を比べて, $\underline{x = -3}$
- (3) $2 \log_2 6 - \log_2 9$
 $= \log_2 \frac{6^2}{9} = \log_2 4 = \underline{2}$
- (4) $\log_{10} 12 = \log_{10} (2^2 \times 3)$
 $= 2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3$
 $= \underline{2a+b}$
- (5) $\log_3 x = 2$ を満たす x の値は,
 $x = 3^2 = 9$
 グラフより, 不等式 $\log_3 x < 9$ を満たす
 x の範囲は,
 $\underline{0 < x < 9}$

[α - 5] 微分・積分の考え

- (1) $y' = 3x^2 - 2 \times 2x + 9 \times 1$
 $= \underline{3x^2 - 4x + 9}$
- (2) $\frac{f(-1)-f(-2)}{(-1)-(-2)} = \frac{2-5}{1} = \underline{-3}$
- (3) $y' = 4x$, $x = 1$ のとき $y' = 4$ より
 接線の傾きは4 だから, $y-2 = 4(x-1)$
 よって, $\underline{y = 4x-2}$
- (4) $\int (x^2 - 6x + 4) dx = \frac{1}{3}x^3 - 6 \times \frac{1}{2}x^2 + 4x + C$
 $= \underline{\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 4x + C}$
- (5) $\int_{-1}^1 (x^2 + x + 1) dx = 2 \int_0^1 (x^2 + 1) dx$
 $= 2 \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 = 2 \times \frac{4}{3} = \underline{\frac{8}{3}}$

[α - 6] 式と証明・高次方程式

(等式の証明、不等式の証明は除く)

- (1) $\frac{48a^2b^3c^3}{36a^4bc^3} = \underline{\frac{4b^3}{3a}}$
- (2) $(1-\sqrt{4})(1+\sqrt{4})$
 $= (1-\sqrt{4}i)(1+\sqrt{4}i) = (1-2i)(1+2i)$
 $= 1-4i^2 = 1+4 = \underline{5}$
- (3) 解と係数の関係より,
 $\alpha + \beta = -\frac{(-2)}{1} = 2, \alpha\beta = \frac{3}{1} = 3$
 よって,
 $(\alpha+1)(\beta+1)$
 $= \alpha\beta + (\alpha+\beta) + 1$
 $= 3+2+1$
 $= \underline{6}$
- (4) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ とおくと,
 $P(-1) = (-1)^3 - 6 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + 10$
 $= -1 - 6 - 3 + 10 = 0$
 だから, $P(x)$ は $x+1$ で割り切れる。

$$\begin{array}{r} x^2-7x+10 \\ x+1 \overline{) x^3-6x^2+3x+10} \\ \underline{x^3+x^2} \\ -7x^2+3x \\ \underline{-7x^2-7x} \\ 10x+10 \\ \underline{10x+10} \\ 0 \end{array}$$

よって, $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = (x+1)(x^2 - 7x + 10)$
 $= \underline{(x+1)(x-2)(x-5)}$

- (5) 判別式を D とすると,
 $D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times k < 0$
 $9 - 4k < 0$
 $-4k < -9$
 $k > \underline{\frac{9}{4}}$

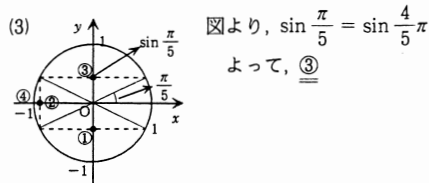
[α - 7] 図形と方程式 (軌跡と領域は除く)

- (1) 外分点の公式より
 x 座標は, $\frac{(-1) \times 4 + 2 \times 1}{2-1} = -2$
 y 座標は, $\frac{(-1) \times (-2) + 2 \times 7}{2-1} = 16$
 よって, $\underline{(-2, 16)}$
- (2) 重心の公式より,
 x 座標は, $\frac{1-5+7}{3} = 1$
 y 座標は, $\frac{-3+7+11}{3} = 5$
 よって, $\underline{(1, 5)}$
- (3) 直線 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ の傾きは $-\frac{1}{2}$ であるから,
 この直線に垂直な直線の傾きは2
 ①の傾きは $\frac{1}{2}$, ②の傾きは $-\frac{1}{2}$
 ③の傾きは2, ④の傾きは -2 だから,
 直線 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ に垂直であるのは $\underline{\textcircled{3}}$
- (4) $x^2 + y^2 - 10x + 12y - 3 = 0$
 $(x-5)^2 + (y+6)^2 = 64$
 中心 $(5, -6)$, 半径8
- (5) $\frac{4+(-2)}{2} = 1, \frac{-1+7}{2} = 3$ より,
 中心は, $(1, 3)$
 $\sqrt{(4-1)^2 + (-1-3)^2} = 5$ より,
 半径は5
 したがって, $\underline{(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25}$

[α - 8] 三角関数 (加法定理は除く)

(1) $750^\circ = 2 \times 360^\circ + 30^\circ$ より,
正で最小の角は, 30°

(2) $l = r\theta$ より $\pi = 4\theta$
よって, $\theta = \frac{\pi}{4}$



(4) $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ より
 $1 \leq \cos \theta + 2 \leq 3$
よって, $1 \leq y \leq 3$

(5) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると,
 $\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$
 $1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$
よって, $\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$

[α - 9] 指数関数・対数関数 (対数関数は除く)

(1) $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{5}{6}} \div 5^{\frac{1}{3}}$
 $= 5^{\frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3}} = 5^{\frac{3+5-2}{6}}$
 $= 5^{\frac{6}{6}} = 5^1 = 5$

(2) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$
 $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}$
 $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}}$
 $\frac{5}{4} < \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$ だから,
 $\sqrt[4]{32} < \sqrt[3]{16} < \sqrt{8}$
よって, 小さい順に左から並べると,
 $\sqrt[4]{32}, \sqrt[3]{16}, \sqrt{8}$

(3) $2^2 = 2^{\frac{1}{2}}$ より, $x = \frac{1}{2}$

(4) $3^2 \leq 3^4$ より, $x \leq 4$

(5) $\left(3^{\frac{1}{3}} + 1\right) \left(3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{1}{3}} + 1\right)$
 $= \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 1^3$
 $= 3 + 1$
 $= 4$

[α - 10] 平面図形

- (1) 「最も大きい辺の長さ < 他の 2 辺の長さの和」
の条件を満たしていれば良いから,

	最大の辺の長さ	他の 2 辺の長さの和
(ア)	7	3+5=8
(イ)	15	4+10=14
(ウ)	8	2+6=8
(エ)	15	5+11=16

条件を満たすのは, (ア), (エ)

- (2) BC // DE であるから 2 つの三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ は相似である。そのとき, 相対する 2 つの辺の比は等しいから,
AC : AE = AB : AD
AC : 4 = 15 : 6
6AC = 60
よって, AC = 10

- (3) 接線と弦のつくる角の定理 (接弦定理) より,
 $\angle ACB = 65^\circ$
三角形の内角の和は 180° であるから,
 $\angle ABC = 180^\circ - \angle ACB - \angle BAC$
 $= 180^\circ - 65^\circ - 48^\circ = 67^\circ$

- (4) 方べきの定理より,
AB · AC = AT²
 $x = AB$ とおいて,
 $x(x+5) = 6^2$
 $x^2 + 5x - 36 = 0$
 $(x+9)(x-4) = 0$
 $x > 0$ より, $x = 4$
したがって, AB = 4

- (5) 半径 5 の円を C_1 , 半径 x の円を C_2 とすると,
 C_2 が C_1 に内接する場合 $x = 1$
 C_1 が C_2 に内接する場合 $x = 9$
したがって, $x = 1, 9$

[α - 11] 集合と論理

- (1) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
 $B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
よって, $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$
- (2) 1 から 49 までの自然数のうち,
3 の倍数は $(49 \div 3 = 16 \cdots 1)$ 16 個
4 の倍数は $(49 \div 4 = 12 \cdots 1)$ 12 個
12 の倍数は $(49 \div 12 = 4 \cdots 1)$ 4 個
あるので, 3 または 4 の倍数は,
 $16 + 12 - 4 = 24$ より 24 個
同様に 1 から 100 までの自然数のうち,
3 の倍数は 33 個, 4 の倍数は 25 個, 12 の倍数は 8 個
あるので, 3 または 4 の倍数は,
 $33 + 25 - 8 = 50$ より 50 個
よって, 50 から 100 までの自然数のうち 3 または 4 の倍数の個数は,
 $50 - 24 = 26$ (個)

- (3) (ア) $\sqrt{4} = 2$ 無理数ではないので偽
(イ) $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ となり偽
他はすべて真である。よって, (ウ), (エ)

- (4) 2 つの条件を
 $p: x^2 = 1, q: x = 1$ とするとき,
 $q \Rightarrow p$ が成り立ち, $p \nRightarrow q$ なので,
 p は q であるための必要条件であるが十分条件ではない。したがって, (ア)

- (5) 英語が 70 点以上の人の集合を A
数学が 70 点以上の人の集合を B とする。
 $n(A \cup B) = n(U) - n(A \cap B)$
 $= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\}$
 $= 40 - (12 + 20 - 7) = 15$ (人)

[α - 12] 場合の数と確率

- (1) ${}_4P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (通り)
- (2) ${}_9C_3 \times {}_5C_2$
 $= \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 840$ (通り)
- (3) 奇数の目は, 1, 3, 5
ともに奇数の目が出る場合は, $3 \times 3 = 9$ であるから
ともに奇数の目が出る確率は, $\frac{9}{6 \times 6} = \frac{1}{4}$
- (4) 少なくとも 1 本は当たりくじである事象は, 3 本ともはずれくじを引く事象の余事象である。
 $1 - \frac{{}_6C_3}{{}_9C_3} = 1 - \frac{20}{84} = \frac{16}{21}$
- (5) 10 点の確率 $\frac{3}{6}$, 20 点の確率 $\frac{2}{6}$, 30 点の確率 $\frac{1}{6}$
求める期待値は,
 $10 \times \frac{3}{6} + 20 \times \frac{2}{6} + 30 \times \frac{1}{6} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}$ (点)

[α - 13] 場合の数と確率 (確率は除く)

- (1) $3 \times 3 = 9$ 9 項
- (2) 女子 2 人を 1 組として考えると 6! 通り
その並び方のそのおのおのについて, 女子 2 人が入れ替わるので $6! \times 2 = 1440$ (通り)
- (3) 東へ 1 区画進むことを $\square$, 北に 1 区画進むことを $\square$ で表すと, 最短距離で行く道順は $\square \square \square \square$ 5 個と $\square \square \square \square$ 4 個とで表される。9 つの場所に $\square$ を入れる 5 か所を選ぶ方法と考えると,
 ${}_9C_5 = 126$ (通り)
- 【別解】 $\frac{9!}{5! 4!} = 126$ (通り)
- (4) 同じ数字を繰り返して使えるから, それぞれの桁には 3 通りの数が入ることができる。
 $3^5 = 243$ (個)
- (5) 展開した式の一般項は,
 ${}_5C_r a^{5-r} (-2b)^r = {}_5C_r (-2)^r a^{5-r} b^r$
 $a^3 b^2$ の項は $r = 2$ のときであるから, その係数は
 ${}_5C_2 \times (-2)^2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 4$
 $= 40$

β 共通問題

$$(1) \frac{a-b}{a+b} \div \frac{(a-b)^2}{a^2-b^2} = \frac{a-b}{a+b} \times \frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$$

$$= \frac{a-b}{a+b} \times \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2} = 1$$

$$(2) (2+3i)(a+bi) = 7+4i \text{ より}$$

$$a+bi = \frac{7+4i}{2+3i}$$

$$\text{ここで } \frac{7+4i}{2+3i} = \frac{(7+4i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$$

$$= \frac{14-21i+8i-12i^2}{4-9i^2}$$

$$= \frac{26-13i}{13} = \frac{13(2-i)}{13} = 2-i$$

よって $a+bi = 2-i$ であるから、
実部、虚部を比較して $a=2, b=-1$

$$(3) \text{ 解と係数の関係により}$$

$$\alpha+\beta = \frac{-1}{1} = -1, \alpha\beta = \frac{1}{1} = 1$$

よって
 $2\alpha+2\beta = 2(\alpha+\beta) = 2 \times (-1) = -2$
 $2\alpha \times 2\beta = 4\alpha\beta = 4 \times 1 = 4$
 したがって、求める2次方程式は
 $x^2 - (-2)x + 4 = 0$
 すなわち $x^2 + 2x + 4 = 0$

$$(4) \text{ 重心の } x \text{ 座標について } \frac{1+(-5)+a}{3} = 2$$

が成り立つから、これを解いて $a=10$

$$\text{重心の } y \text{ 座標について } \frac{-3+7+b}{3} = 3$$

が成り立つから、これを解いて $b=5$

$$a=10, b=5$$

$$(5) 3x-y-4=0 \text{ を変形すると, } y=3x-4$$

求める直線はこれに平行であるから、傾きは3であり、点(1, 2)を通るから、その方程式は

$$y-2=3(x-1)$$

$$y=3x-1$$

よって $3x-y-1=0$ [$y=3x-1$ も可]

【別解】

直線 $3x-y-4=0$ に平行な直線の方程式は
 $3x-y+c=0$ と表される。この直線が点(1, 2)

を通るから

$$3 \times 1 - 2 + c = 0$$

よって $c=-1$

ゆえに、 $3x-y-1=0$ [$y=3x-1$ も可]

$$(6) 2x+y-5=0 \text{ より}$$

$$y=-2x+5$$

直線 $y=-2x+5$ の

傾きは-2であるから、

この直線に垂直な直線

の傾きは $\frac{1}{2}$ である。

点(-1, 2)を通り、

傾き $\frac{1}{2}$ の直線の方程式は $y-2 = \frac{1}{2}(x+1)$

$$\text{すなわち } y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \dots \text{①}$$

求める点の座標を (a, b) とすると、

この点は直線①上にあるから

$$b = \frac{1}{2}a + \frac{5}{2} \dots \text{②}$$

また、点(-1, 2)と点 (a, b) を結ぶ線分の

中点 $\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$ は直線 $y=-2x+5$

上にあるから

$$\frac{2+b}{2} = -2 \times \frac{-1+a}{2} + 5$$

これを整理して $2a+b=10 \dots \text{③}$

連立方程式②、③を解いて $a=3, b=4$

よって、求める点の座標は $(3, 4)$

$$(7) \text{ア} \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(a + \frac{4}{a}\right) = a^2 + a \times \frac{4}{a} + \frac{1}{a} \times a + \frac{4}{a^2}$$

$$= a^2 + \frac{4}{a^2} + 5 \dots \text{③}$$

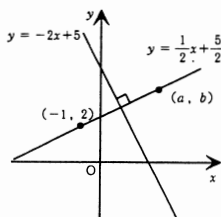
$$(イ) a > 0 \text{ より } a^2 > 0, \frac{4}{a^2} > 0 \text{ であるから,}$$

相加平均と相乗平均の関係により

$$\frac{a^2 + \frac{4}{a^2}}{2} \geq \sqrt{a^2 \times \frac{4}{a^2}}$$

$$\text{したがって } a^2 + \frac{4}{a^2} \geq 4 \quad \Delta$$

両辺に5を加えて $a^2 + \frac{4}{a^2} + 5 \geq 4+5$



$$\text{よって, (ア)より } \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(a + \frac{4}{a}\right) \geq 9 \quad \Delta$$

ここで、等号が成り立つのは $a^2 = \frac{4}{a^2}$, すなわち

$a^4 = 4$ のときである。

すると、 $a > 0$ より $a = \sqrt{2}$

よって

最小値は9 そのときの a の値は $\sqrt{2}$ ⑦

$$(8) \text{ア} \text{ 円 } x^2 + y^2 = 9 \text{ 上の点 } (x_1, y_1) \text{ における接線の}$$

方程式は $x_1x + y_1y = 9$

よって、点 $(2, \sqrt{5})$ における接線 l の方程式は

$$2x + \sqrt{5}y = 9 \quad \text{③}$$

$$(イ) l: 2x + \sqrt{5}y = 9 \text{ を変形して } 2x + \sqrt{5}y - 9 = 0$$

よって、円の中心 $(3, 0)$ と直線 l との距離は

$$\frac{|2 \times 3 + \sqrt{5} \times 0 - 9|}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2}} = \frac{|6-9|}{\sqrt{4+5}} = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1 \quad \Delta$$

したがって、求める円の半径は1である。

円の中心が点 $(3, 0)$ であるから、その方程式は

$$(x-3)^2 + y^2 = 1 \quad \text{⑦}$$

β 選択問題

[β-1] 三角関数

$$(1) \text{ 加法定理より}$$

$$\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ)$$

$$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$(2) \tan \theta > 0 \text{ より, } \theta \text{ は第1象限の角か第3象限の角}$$

である。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$$

$$(3) 1 - 2 \sin^2 \theta = 3 \sin \theta - 1$$

$$2 \sin^2 \theta + 3 \sin \theta - 2 = 0$$

$$(2 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 2) = 0$$

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1 \text{ より}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

$$(4) y = \sin \theta + \cos \theta$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$-1 \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \text{ だから}$$

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}$$

よって、最大値は $\sqrt{2}$

$$(5) y = 0 \text{ とおくと}$$

$$\sin \left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{2} = n\pi \text{ (} n \text{ は整数)}$$

$$3x = \pi + 2n\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}n\pi$$

よって、正で最小となる x は $\frac{\pi}{3}$

[β-2] 指数関数・対数関数

$$(1) \sqrt[3]{a^4} \times \sqrt{a^3} \div \sqrt[5]{a^5}$$

$$= a^{\frac{4}{3}} \times a^{\frac{3}{2}} \div a^{\frac{5}{5}}$$

$$= a^{\frac{4}{3} + \frac{3}{2} - 1}$$

$$= a^{\frac{12}{6}}$$

$$= a^2$$

$$(2) 3^{x-2} = \frac{1}{9} \text{ より}$$

$$3^{x-2} = 3^{-2}$$

よって、 $x-2 = -2$

$$x = 0$$

$$(3) \log_{10} \frac{1}{4} - 2 \log_{10} 3 + \log_{10} \frac{9}{25}$$

$$= \log_{10} \frac{1}{4} + \log_{10} 3^{-2} + \log_{10} \frac{9}{25}$$

$$= \log_{10} \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{9} \times \frac{9}{25} \right)$$

$$= \log_{10} \frac{1}{100}$$

$$= \log_{10} 10^{-2}$$

$$= -2$$

- (4) $\log_{10} 2 = a, \log_{10} 3 = b$ であるから

$$\begin{aligned} & \log_{10} 15 \\ &= \log_{10} 3 + \log_{10} 5 \\ &= \log_{10} 3 + \log_{10} \frac{10}{2} \\ &= \log_{10} 3 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \\ &= \log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2 \\ &= -a + b + 1 \end{aligned}$$

- (5) 真数条件より

$$\begin{aligned} & x-1 > 0, x+3 > 0 \\ & \text{よって } x > 1 \cdots \textcircled{1} \\ & 2\log_2(x-1) = \log_2(x+3) + 1 \text{ より} \\ & 2\log_2(x-1) = \log_2(x+3) + \log_2 2 \\ & \log_2(x-1)^2 = \log_2 2(x+3) \\ & \text{これより} \\ & (x-1)^2 = 2(x+3) \\ & x^2 - 2x + 1 = 2x + 6 \\ & x^2 - 4x - 5 = 0 \\ & (x-5)(x+1) = 0 \\ & \textcircled{1} \text{ より } \underline{x = 5} \end{aligned}$$

[β-3] 微分・積分の考え

$$\begin{aligned} (1) \int_{-1}^1 (x^2 + x + 1) dx &= 2 \int_0^1 (x^2 + 1) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} x^3 + x \right]_0^1 = 2 \left\{ \left(\frac{1}{3} + 1 \right) - 0 \right\} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}} \end{aligned}$$

- (2) $f(x) = x^2 - 2x$ とすると $f'(x) = 2x - 2$
 よって、点 $(-1, 3)$ における接線の傾きは
 $f'(-1) = 2 \times (-1) - 2 = -4$
 求める接線は点 $(-1, 3)$ を通るから、
 その方程式は $y - 3 = -4(x - (-1))$
 よって $\underline{y = -4x - 1}$

- (3) $f(x) = \int (2x + a) dx = x^2 + ax + C$
 $f(0) = 3$ より $C = 3 \cdots \textcircled{1}$
 $f(1) = 2$ より $1 + a + C = 2 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ を $\textcircled{2}$ に代入して整理すると $\underline{a = -2}$

- (4) $x^3 - 3x - a = 0$ を変形して $x^3 - 3x = a$
 $f(x) = x^3 - 3x$ とすると
 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$
 したがって、 $f'(x) = 0$ を満たす x の値は
 $x = -1, 1$ であるから、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

よって、 $y = x^3 - 3x$ のグラフは右図のようになる。
 方程式 $x^3 - 3x = a$ が異なる3つの実数解をもつのは、 $y = x^3 - 3x$ のグラフと直線 $y = a$ が3つの共有点をもつときであるから、図より $\underline{-2 < a < 2}$

- (5) 2つの放物線の交点の x 座標は、次の方程式の解で与えられる。
 $x^2 = -x^2 + 2x$
 これを整理して、両辺を2で割ると $x^2 - x = 0$
 よって $x(x-1) = 0$
 より $x = 0, 1$
 したがって、2つの放物線は図のようになるから、求める面積 S は

$$S = \int_0^1 \{(-x^2 + 2x) - x^2\} dx = \int_0^1 (-2x^2 + 2x) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3} x^3 + x^2 \right]_0^1 = \left(-\frac{2}{3} + 1 \right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

[β-4] 式と証明・高次方程式

- (1) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ とすると
 $P(-1) = (-1)^3 - 6 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + 10$
 $= -1 - 6 - 3 + 10 = 0$
 よって、 $P(x)$ は $x+1$ で割り切れる。
 したがって $x^3 - 3x^2 + 2x + 6 = (x+1)(x^2 - 7x + 10)$
 $= \underline{\underline{(x+1)(x-2)(x-5)}}$

- (2) 判別式を D とすると
 $D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (k+1) < 0$
 $9 - 4k - 4 < 0$
 $-4k < -5$
 $k > \frac{5}{4}$
 (3) $x = 1 - \sqrt{3}i$ だから
 $3(1 - \sqrt{3}i)^2 + a(1 - \sqrt{3}i) + b = 0$
 $3(1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2) + a - \sqrt{3}ai + b = 0$
 $3(-2 - 2\sqrt{3}i) + a - \sqrt{3}ai + b = 0$
 $(-6 + a + b) + (-6\sqrt{3} - \sqrt{3}a)i = 0$
 より $\begin{cases} -6 + a + b = 0 \\ -6\sqrt{3} - \sqrt{3}a = 0 \end{cases}$
 これを解いて $\underline{a = -6, b = 12}$

- (4) $x = 1$ を代入すると
 $0 + b(1-2)(1-3) + 0 = 2$
 $2b = 2$
 $b = 1$
 $x = 2$ を代入すると
 $0 + 0 + c(2-3)(2-1) = 2$
 $-c = 2$
 $c = -2$
 $x = 3$ を代入すると
 $a(3-1)(3-2) + 0 + 0 = 2$
 $2a = 2$
 $a = 1$
 よって $\underline{a = 1, b = 1, c = -2}$
 [このとき確かに与式は恒等式になる]

- (5) $x^2 = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$
 だから
 $x^3 - x^2 - 3x + 1$
 $= 2i(1+i) - 2i - 3(1+i) + 1$
 $= 2i + 2i^2 - 2i - 3 - 3i + 1$
 $= \underline{\underline{-4 - 3i}}$

[β-5] 図形と方程式 (軌跡と領域は除く)

- (1) $\sqrt{(-2-4)^2} + \sqrt{7-(-1)}^2$
 $= \sqrt{6^2 + 8^2}$
 $= \sqrt{36 + 64}$
 $= \sqrt{100}$
 $= 10$
 (2) 平行四辺形の対角線の中点は一致するので

$$\begin{cases} \frac{3+a}{2} = \frac{1+b}{2} \\ \frac{-4+b}{2} = \frac{2-5}{2} \end{cases} \text{より}$$

$$\begin{cases} a+3 = 7 \\ b-4 = -3 \end{cases}$$
 よって $\underline{a = 4, b = 1}$
 (3) 求める直線の方程式は
 $(2x - y - 5) + k(x + y + 2) = 0$
 と表せる。
 点 $(3, -4)$ を通るから
 $x = 3, y = -4$ を代入して式が成り立つ。
 $(6 + 4 - 5) + k(3 - 4 + 2) = 0$
 $5 + k = 0$ より
 $k = -5$
 これを k を代入して
 $(2x - y - 5) - 5(x + y + 2) = 0$
 $2x - y - 5 - 5x - 5y - 10 = 0$
 $-3x - 6y - 15 = 0$
 $\underline{x + 2y + 5 = 0}$
 【別解】
 連立方程式

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$
 を解いて $x = 1, y = -3$
 したがって、2直線の交点の座標は $(1, -3)$
 よって、2点 $(1, -3)$ と $(3, -4)$
 を通る直線の方程式は $y + 3 = \frac{-3+4}{1-3}(x-1)$
 よって $\underline{x + 2y + 5 = 0}$

- (4) $y = -2x + k$ より $2x + y - k = 0$
この直線と円の中心 $(0, 0)$ との距離は

$$\frac{|0+0-k|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

円の半径は $\sqrt{5}$ であり、直線と円が共有点をもつから

$$\sqrt{5} \geq \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

よって $|k| \leq 5$ より

$$-5 \leq k \leq 5$$

【別解】

$x^2 + y^2 = 5$ と $y = -2x + k$ より

y を消去して整理すると、

$$5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0$$

与えられた円と直線が共有点をもつことにより

$$D \geq 0$$

$$\frac{D}{4} = 4k^2 - 5(k^2 - 5) \geq 0$$

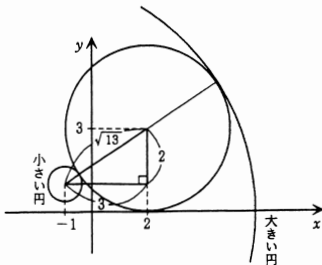
$$-k^2 + 25 \geq 0$$

$$k^2 - 25 \leq 0$$

$$(k+5)(k-5) \leq 0$$

$$-5 \leq k \leq 5$$

- (5) 2つの円の中心間の距離は $\sqrt{13}$



求める円は、

図のように大小2つある

$$\text{よって } r = \sqrt{13} - 3, \sqrt{13} + 3$$

$$r = \sqrt{13} \pm 3$$

[β-6] 三角関数 (加法定理は除く)

- (1) $y = \tan \theta$ の周期は π

よって

$$y = \tan \frac{\theta}{2} \text{ の周期は}$$

$$\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$$

- (2) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ の両辺を

2乗すると

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{よって } \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

- (3) $\sin(\theta + \pi) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(\theta + \pi) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

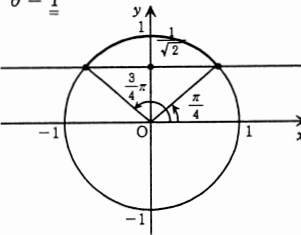
$$= -\sin \theta (-\sin \theta) - (-\cos \theta) \cos \theta$$

$$= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

- (4) $\sqrt{2} \sin \theta \geq 1$

$$\sin \theta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$$



- (5) $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ より

$$2 \leq \sin \theta + 3 \leq 4$$

$$\text{よって } 2 \leq y \leq 4$$

[β-7] 指数関数・対数関数 (対数関数は除く)

- (1) $\sqrt{a^{\frac{2}{3}}a} = \left(a^1 \times a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{1+\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{3} \times \frac{1}{2}}$

$$= a^{\frac{2}{3}}$$

- (2) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = (2^{-2})^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}}$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{-1} = (2^{-3})^{-1} = 2^3$$

したがって、指数を比較すると $-3 < -\frac{2}{3} < 3$

底2は1より大きいから

$$2^{-3} < 2^{-\frac{2}{3}} < 2^3$$

$$\text{ゆえに } 2^{-3}, \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \left(\frac{1}{8}\right)^{-1}$$

- (3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

底が1より小さいから

$$x+1 < 2x$$

$$\text{ゆえに } x > 1$$

- (4) $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$$

$$(3^x - 1)(3^x - 9) = 0 \text{ から}$$

$$3^x = 1, 3^x = 9$$

$$\text{よって } x = 0, 2$$

- (5) $y = 2^{x+2} - 4^x = 2^2 \times 2^x - 2^{2x} = 4 \cdot 2^x - (2^x)^2$

$$2^x = t \text{ とおくと}$$

$$y = 4t - t^2$$

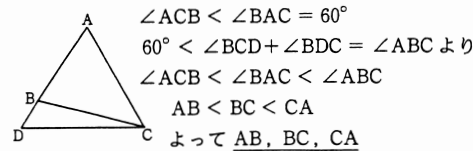
$$= -(t-2)^2 + 4 \quad (t > 0) \text{ より}$$

$$t = 2 \text{ すなわち } x = 1 \text{ のとき最大値 } 4$$

[β-8] 平面図形

- (1) 三角形ABCで辺ABを延長して

正三角形ADCを作ると、



- (2) 同じ弧に対する円周角は等しいから

$$\angle CAD = \angle CBD = 35^\circ$$

$$\angle ADE + \angle DAE = 58^\circ \text{ より}$$

$$\angle ADE = 58^\circ - \angle DAE$$

$$= 58^\circ - 35^\circ = 23^\circ$$

- (3) 線分AOの延長線上で円との交点をCとおくと、
接線と弦のつくる角の定理より $\angle ACB = 65^\circ$

中心角は円周角の2倍だから

$$\angle AOB = 130^\circ$$

- (4) 三平方の定理より $AC = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$
点Dは三角形の内接円の中心であり、その半径を
 r とすると、 $DH = r$ である。

$$\triangle BDC + \triangle ADB + \triangle CDA = \triangle ABC$$

$$\frac{1}{2} \times 13 \times r + \frac{1}{2} \times 12 \times r + \frac{1}{2} \times 5 \times r = \frac{1}{2} \times 12 \times 5$$

$$15r = 30$$

$$r = 2$$

$$\text{よって } DH = 2$$

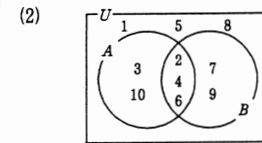
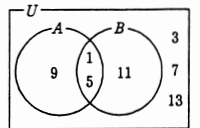
- (5) 半径5の円を C_1 、半径 x の円を C_2 とすると C_2 が
 C_1 に内接する場合 $x = 1$ 、 C_1 が C_2 に内接する場
合 $x = 9$ 、2つの円が2点を共有するのは、 x の値
がその間の場合であるから $1 < x < 9$

[β-9] 集合と論理

- (1) $\bar{A} = \{3, 7, 11, 13\}$

$$\bar{B} = \{3, 7, 9, 13\}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{3, 7, 13\}$$



$$\text{図より } B = \{2, 4, 6, 7, 9\}$$

- (3) 2つの条件を $p: x = -3$,
 $q: x^2 + 2x - 3 = 0$ (解くと $x = 1, -3$)
 $p \Rightarrow q$ が成り立ち、 $q \Rightarrow p$ なので
 p は q であるための十分条件であるが必要条件で
はない。(イ)

- (4) 英語が70点以上の人の集合を A
数学が70点以上の人の集合を B とする。

$$n(\bar{A} \cup \bar{B}) = n(U) - n(A \cup B)$$

$$= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\}$$

$$= 40 - (12 + 20 - 7)$$

$$= 15 \text{ (人)}$$

- (5) 対偶 $\underline{\underline{「x^2 - 2x \geq 0 \text{ ならば } x \geq 2 \text{ である。}」}}$

$$x^2 - 2x \geq 0, x(x-2) \geq 0,$$

$$\text{よって } x \leq 0, 2 \leq x \text{ だから } \underline{\underline{偽}}$$

[β-10] 場合の数と確率

- (1) 両端に a と b がくる並べ方は 2 通り
残りの 4 文字の並べ方は 4! 通り
よって $2 \times 4! = \underline{48}$ (通り)
- (2) 特定の 2 人を除いた 7 人の中から 2 人選べばよい
 ${}_7C_2 = \underline{21}$ (通り)
- (3) 少なくとも 1 個は白球である事象は、3 個とも赤球を取り出す事象の余事象であるから
 $1 - \frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3} = 1 - \frac{20}{120} = \frac{5}{6}$
- (4) 1 つのさいころを 1 回投げたとき
3 の倍数の目が出る確率は $\frac{1}{3}$
 ${}_5C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 10 \times \frac{1}{27} \times \frac{4}{9} = \frac{40}{243}$
- (5) 次のように場合分けをする。
10 点を 2 枚引くときの確率 $\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{15}$
10 点と 20 点を引くときの確率 $\frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_6C_2} = \frac{2}{5}$
10 点と 30 点を引くときの確率 $\frac{{}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{2}{15}$
20 点を 2 枚引くときの確率 $\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{5}$
20 点と 30 点を引くときの確率 $\frac{{}_3C_1}{{}_6C_2} = \frac{1}{5}$
よって、求める期待値は
 $20 \times \frac{1}{15} + 30 \times \frac{2}{5} + 40 \times \frac{2}{15} + 40 \times \frac{1}{5} + 50 \times \frac{1}{5} = \frac{110}{3}$
 $\underline{\underline{\frac{110}{3}}}$ 点

[β-11] 場合の数と確率 (確率は除く)

- (1) $200 = 2^3 \times 5^2$
積の法則により $(3+1)(2+1) = \underline{12}$ (個)
- (2) 一の位は奇数なので 3 通り
百の位は 0 であってはならないので 4 通り
十の位は 4 通り
 $3 \times 4 \times 4 = \underline{48}$ (個)

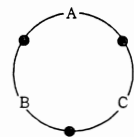
(3) 10 人の中から 5 人選び、A, B の 2 つのグループに分ける方法は

$${}_{10}C_5 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252 \text{ (通り)}$$

A, B の区別がないので、分け方は 2! で割って

$$\frac{{}_{10}C_5}{2!} = \underline{126} \text{ (通り)}$$

(4)



A, B, C の座り方は
 $(3-1)! = 2$ 通り
A, B, C の間に D, E, F が
入る座り方は ${}_3P_3$ 通り
 $2 \times {}_3P_3 = \underline{12}$ (通り)

(5) 展開式の一般項は

$${}_5C_r a^{5-r} (-2b)^r = {}_5C_r (-2)^r a^{5-r} b^r$$

$a^3 b^2$ の項は $r = 2$ のときであるから、その係数は

$${}_5C_2 \times (-2)^2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 4 = \underline{40}$$

[β-12] 数列

- (1) 初項を a 、公差を d とおくと
 $a + 2d = 4 \cdots \textcircled{1}$ $a + 5d = 25 \cdots \textcircled{2}$
より $a = -10, d = 7$
初項 -10 , 公差 7
- (2) $a_n = 106 + (n-1)(-4) = -4n + 110$
 $a_n < 0$ となるのは
 $-4n + 110 < 0$ より $n > 27.5$
初めて負になるのは第 28 項
- (3) 初項を a とおくと
 $\frac{a(3^6-1)}{3-1} = -728$ より
 $\underline{a = -2}$
- (4) $\sum_{k=1}^n (3k^2 + k) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k$
 $= 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$
 $= \frac{n(n+1)}{2} (2n+2) = \underline{\underline{\frac{n(n+1)^2}{2}}}$
- (5) $a_{n+1} = 4a_n + 3 \cdots \textcircled{1}$
 $\alpha = 4\alpha + 3 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より $a_{n+1} - \alpha = 4(a_n - \alpha)$
 $\textcircled{2}$ より $\alpha = -1$ だから数列 $\{a_n + 1\}$ は公比 4

初項 $a_1 + 1 = 2 + 1 = 3$ の等比数列をなす。

よって $a_n + 1 = 3 \cdot 4^{n-1}$

ゆえに $\underline{a_n = 3 \cdot 4^{n-1} - 1}$

[β-13] ベクトル

- (1) $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c}$ より
 $m(2, 3) + n(-1, 2) = (10, 1)$
 $(2m - n, 3m + 2n) = (10, 1)$
よって $\begin{cases} 2m - n = 10 \cdots \textcircled{1} \\ 3m + 2n = 1 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を解いて $\underline{m = 3, n = -4}$
- (2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ から $-5 + 5p = 0$
ゆえに $\underline{p = 1}$
- (3) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 16$ から $|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16$
すなわち $36 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 = 16$
ゆえに $\underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = -12}$
- (4) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF}$
 $= \underline{\underline{-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}}$
- (5) $\vec{a} + t\vec{b} = (1, 2, 2) + t(1, 0, -1)$
 $= (1+t, 2, 2-t)$ から
 $|\vec{a} + t\vec{b}|^2 = (1+t)^2 + 2^2 + (2-t)^2$
 $= 2t^2 - 2t + 9 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{17}{2}$
 $t = \frac{1}{2}$ のとき $|\vec{a} + t\vec{b}|^2$ は最小で
最小値は $\frac{17}{2}$
 $|\vec{a} + t\vec{b}| \geq 0$ であるから、
このとき $|\vec{a} + t\vec{b}|$ も最小で
最小値は $\sqrt{\frac{17}{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{34}}{2}}}$