平成18年度　秋季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{SⅡ}\alpha}$ 解答 No.1

［α－1］式と証明・高次方程式

(1) $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{x(\cancel{x+1})}{(\cancel{x+1})(x-1)}=\underline{\underline{\dfrac{x}{x-1}}}$

(2) $(2+3i)^2=2^2+2\times2\times3i+(3i)^2$
$=4+12i+9i^2$
$=4+12i-9$
$=\underline{\underline{-5+12i}}$

(3) $P(x)=x^3+2x^2-3x+a$ とおくと，$P(x)$ が $x+2$ で割り切れるのは，$P(-2)=0$ すなわち
$(-2)^3+2\times(-2)^2-3\times(-2)+a=0$
よって，$-8+8+6+a=0$
ゆえに $\underline{\underline{a=-6}}$

(4) 2次方程式 $x^2-2x+3k=0$ が異なる2つの実数解をもつための条件は，判別式を D とすると，
$D>0$ である。
すなわち，$D=(-2)^2-4\times1\times3k>0$
であるから，$4-12k>0$
よって $\underline{\underline{k<\dfrac{1}{3}}}$

(5) 等式の左辺を x について整理すると
$(2a+2b)x+(a-b)=2$
この等式が x についての恒等式となるのは，両辺の同じ次数の項の係数が等しいときである。
よって $\begin{cases}2a+2b=0\\a-b=2\end{cases}$
これを解いて，$\underline{\underline{a=1,\ b=-1}}$

［α－2］図形と方程式

(1) $A(1,\ 0)$，$B(4,\ 2)$ であるから，
$AB=\sqrt{(4-1)^2+(2-0)^2}=\sqrt{9+4}=\underline{\underline{\sqrt{13}}}$

(2) $A(2,\ 3)$，$B(6,\ 7)$ であるから，線分 AB を 1：3 の比に内分する点の座標は，
$\left(\dfrac{3\times2+1\times6}{1+3},\ \dfrac{3\times3+1\times7}{1+3}\right)$ すなわち $\underline{\underline{(3,\ 4)}}$

(3) 点 $(1,\ 5)$ を通り，傾きが3である直線の方程式は，$y-5=3(x-1)$ すなわち $\underline{\underline{y=3x+2}}$

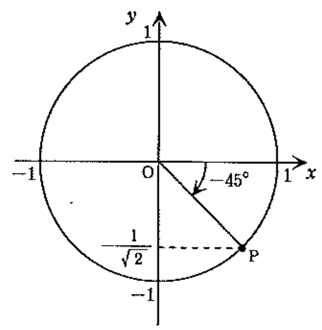
(4) 原点を中心とし，半径3である円の方程式は $x^2+y^2=9$ である。斜線部分の領域はこの円の内部であり，境界線を含むから，これを表す不等式は $\underline{\underline{x^2+y^2\leqq9}}$

(5) 点Pの座標を $(x,\ y)$ とすると，AP＝BP
すなわち $AP^2=BP^2$ が成り立つから
$(x-2)^2+(y-1)^2=x^2+(y-3)^2$
$x^2-4x+4+y^2-2y+1=x^2+y^2-6y+9$
$-4x+4y-4=0$
よって，求める軌跡の方程式は $\underline{\underline{y=x+1}}$
逆にこれを満たす $(x,\ y)$ は条件を満たす。

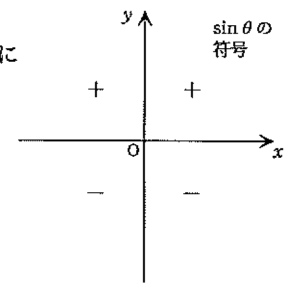
［α－3］三角関数

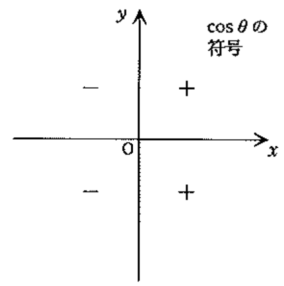
(1) $270^\circ=\dfrac{\pi}{180}\times270=\underline{\underline{\dfrac{3}{2}\pi}}$

(2) 右図より
$\sin(-45^\circ)$
$=\underline{\underline{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}}$



(3) $\sin\theta$，$\cos\theta$ の符号は右図のようになる。
よって
$\underline{\underline{\theta\text{ は第3象限の角}}}$





(4) θ は第4象限の角であるから
$\sin\theta<0$　よって，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から
$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$
$=-\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\underline{\underline{-\dfrac{\sqrt{5}}{3}}}$

(5) 加法定理より
$\cos15^\circ=\cos(60^\circ-45^\circ)$
$=\cos60^\circ\cos45^\circ+\sin60^\circ\sin45^\circ$
$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\underline{\underline{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}}$

［α－4］指数関数・対数関数

(1) $\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=\underline{\underline{5}}$

(2) $2^x=64$ より $2^x=2^6$　ゆえに $x=\underline{\underline{6}}$

(3) $\log_3 27=\log_3 3^3=\underline{\underline{3}}$

(4) $\log_2 12-\log_2 3=\log_2\dfrac{12}{3}=\log_2 4$
$=\log_2 2^2=\underline{\underline{2}}$

(5) $\log_4(x+6)=2$
真数は正なので　$x+6>0$
よって　$x>-6$ …①
$\log_4(x+6)=2$ を変形すると
$\log_4(x+6)=\log_4 16$
$x+6=16$
$x=\underline{\underline{10}}$
これは①を満たす。

［α － 5］微分・積分の考え

(1) $\lim_{x \to 2}(x+3) = 2+3 = \underline{\underline{5}}$

(2) $y = x^3 - 6x^2 - 2$ より

$y' = (x^3)' - 6(x^2)' - (2)'$

$= 3x^2 - 6 \times 2x$

$= \underline{\underline{3x^2 - 12x}}$

(3) $f(x) = x^2 + 1$ とおくと，

$f'(x) = 2x$

ゆえに求める接線の傾きは，$f'(1) = 2$

よって点（1，2）における接線の方程式は

$y - 2 = 2(x-1)$

すなわち　$\underline{\underline{y = 2x}}$

(4) $\int (x^2 - 4x + 1)dx$

$= \int x^2 dx - 4\int x dx + \int 1 dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - 4 \times \frac{1}{2}x^2 + x + C$

$= \underline{\underline{\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + C}}$

(5) $\int_2^4 (x-4)dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 - 4x\right]_2^4$

$= \left(\frac{1}{2} \times 4^2 - 4 \times 4\right) - \left(\frac{1}{2} \times 2^2 - 4 \times 2\right)$

$= (8-16) - (2-8)$

$= \underline{\underline{-2}}$

［α － 6］式と証明・高次方程式（等式の証明，不等式の証明は除く）

(1) $\sqrt{-2} \times \sqrt{-8} = \sqrt{2}\,i \times \sqrt{8}\,i = \sqrt{16}\,i^2 = \underline{\underline{-4}}$

(2) 解の公式より

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1}$

$= \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2} = \underline{\underline{\frac{-3 \pm \sqrt{3}\,i}{2}}}$

(3) 解と係数の関係から，

$\alpha + \beta = -2,\ \alpha\beta = 4$

よって，$\alpha + \beta + \alpha\beta = -2 + 4 = \underline{\underline{2}}$

(4) $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

とおくと，$P(1) = 1^3 + 4 \times 1^2 + 1 - 6 = 0$

ゆえに $P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

右の割り算から

$P(x) = (x-1)(x^2 + 5x + 6)$

したがって

$x^3 + 4x^2 + x - 6$

$= \underline{\underline{(x-1)(x+2)(x+3)}}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 5x + 6 \\
\hline
x - 1 & x^3 + 4x^2 + x - 6 \\
 & x^3 - x^2 \\
\hline
 & 5x^2 + x \\
 & 5x^2 - 5x \\
\hline
 & 6x - 6 \\
 & 6x - 6 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

(5) $(x-2) + (2x+y)i = 0$ より

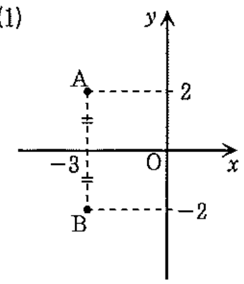
x，y は実数であるから

$x-2$，$2x+y$ も実数である。

よって $x - 2 = 0$，$2x + y = 0$

これを解いて，$\underline{\underline{x = 2,\ y = -4}}$

［α － 7］図形と方程式（軌跡と領域は除く）

(1) 

左図より点Bの座標は

$\underline{\underline{(-3,\ -2)}}$

(2) 3点 A(1，3)，A(5，1)，C(−3，2) であるとき，

△ABC の重心の座標は

$\left(\frac{1+5+(-3)}{3},\ \frac{3+1+2}{3}\right)$ すなわち $\underline{\underline{(1,\ 2)}}$

(3) 直線 $y = -3x + 1$ の傾きは -3 であるから，この直線に垂直な直線の傾きは $\frac{1}{3}$ である。

求める直線は点（−3，3）を通るから，

$y - 3 = \frac{1}{3}(x+3)$　ゆえに $\underline{\underline{y = \frac{1}{3}x + 4}}$

(4) 中心が点（1，−2），半径が 10 である円の方程式は $\underline{\underline{(x-1)^2 + (y+2)^2 = 100}}$

(5) 求める円の方程式を $x^2 + y^2 + \ell x + my + n = 0$ とする。この円が

点 O(0，0) を通るので，$n = 0$ …①

点 A(−1，3) を通るので，

$10 - \ell + 3m + n = 0$ …②

点 B(−4，2) を通るので，

$20 - 4\ell + 2m + n = 0$ …③

①～③を解いて，$\ell = 4$，$m = -2$，$n = 0$

以上により，求める円の方程式は

$\underline{\underline{x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0}}$

〔$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$　も可〕

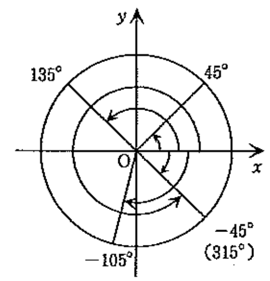
［α － 8］三角関数（加法定理は除く）

(1) 右図より

315° の角の表す動径と同じ位置にあるものは，

−45°

したがって　$\underline{\underline{\text{(ウ)}}}$



(2) 扇形の面積を S，半径を r，弧の長さを ℓ とすると，$S = \frac{1}{2}r\ell$ が成り立つから，求める面積は

$\frac{1}{2} \times 4 \times 3\pi = \underline{\underline{6\pi}}$

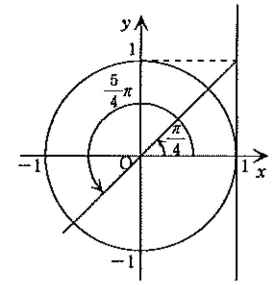
(3) 右図より，

$0 \leqq \theta < 2\pi$ において

$\tan\theta = 1$ を満たす

角 θ は，

$\underline{\underline{\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi}}$



(4) $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ なので

$-\frac{1}{2} \leqq -\frac{1}{2}\sin\theta \leqq \frac{1}{2}$

したがって，関数 $y = -\frac{1}{2}\sin\theta$ の最小値は

$\underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

(5) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

だから

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2 \times \frac{1}{2} = \underline{\underline{2}}$

平成18年度　秋季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{S II }\alpha}$ 解答 No.3

[α − 9] 指数関数・対数関数（対数関数は除く）

(1) $3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{7}{3}} = 3^{\frac{2}{3}+\frac{7}{3}} = 3^3 = \underline{\underline{27}}$

(2) $\sqrt[4]{48} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{\dfrac{48}{3}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = \underline{\underline{2}}$

(3) $2^{3x} > 16$ より $2^{3x} > 2^4$　底2は1より大きいから，

$3x > 4$　これより $\underline{\underline{x > \dfrac{4}{3}}}$

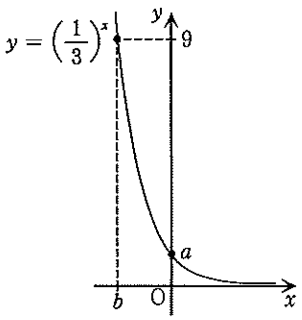
(4) 　5^3 と $5^{\frac{3}{5}}$ と $5^{\frac{1}{3}}$ の指数の大小を比較すると

$\dfrac{1}{3} < \dfrac{3}{5} < 3$ である。底5は1より大きいので，

3数を小さい順に左から並べると，

$\underline{\underline{5^{\frac{1}{3}},\ 5^{\frac{3}{5}},\ 5^3}}$

(5)



図より $a = \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 = 1$

また $\left(\dfrac{1}{3}\right)^b = 9$ より $3^{-b} = 3^2$　これより $b = -2$

よって $\underline{\underline{a = 1,\ b = -2}}$

[α − 10] 平面図形

(1) 三角形の3つの内角の二等分線の交点は，内接円の中心であるから「内心」である。　$\underline{\underline{b}}$

(2) 角の二等分線と線分の比の性質より

BD : DC = AB : AC = 5 : 3

CD = x とすると BD = $6-x$ だから

$(6-x) : x = 5 : 3$

$5x = 3(6-x)$

$8x = 18$

$x = \dfrac{18}{8} = \dfrac{9}{4}$

よって

$\underline{\underline{\mathrm{CD} = \dfrac{9}{4}}}$

(3) △BCD で辺 BD が円の直径であるから，

∠BCD = 90°

したがって ∠BDC = 90° − 35° = 55°

同じ弧 BC に対する円周角は等しいので

α = ∠BDC = $\underline{\underline{55°}}$

(4) △OAB，△OBC，△OCA はすべて点 O を頂点とする二等辺三角形であるから，

∠OBA = 30°，∠OCB = α，∠OAC = 20°

△ABC の内角の和は 180° であるから，

$2\alpha + 2 \times 30° + 2 \times 20° = 180°$

$2\alpha = 80°$

$\underline{\underline{\alpha = 40°}}$

(5) ∠BAC = 180° − (65° + 32°) = 83°

円の接線と弦のつくる角の性質より

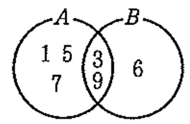
∠PBC = ∠BAC = 83°

∠PCB = ∠BAC = 83°

α = 180° − (83° + 83°) = $\underline{\underline{14°}}$

[α − 11] 集合と論理

(1) $A \cap B = \underline{\underline{\{3,\ 9\}}}$



(2) 100以下の自然数で，5の倍数の集合を A，7の倍数の集合を B とする。

$A = \{5\times1,\ 5\times2,\ \cdots,\ 5\times20\}$ より

$n(A) = 20$

$B = \{7\times1,\ 7\times2,\ \cdots,\ 7\times14\}$ より

$n(B) = 14$

また，$A \cap B$ は35の倍数の集合なので，

$A \cap B = \{35\times1,\ 35\times2\}$ より

$n(A \cap B) = 2$

求める個数は，$A \cup B$ の要素の個数なので，

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 20 + 14 - 2$

$= \underline{\underline{32\ (個)}}$

(3) (ア)

「$x^2 - x - 2 = 0$ ならば，$x = -1$ である」は偽

（反例）$x = 2$ のときも $x^2 - x - 2 = 0$ は成り立つ。

(イ)

「$am = bm$ ならば，$a = b$ である」は偽

（反例）$m = 0$，$a = 1$，$b = 2$ のとき $am = bm$ は成り立つが，$a = b$ は成り立たない。

(ウ)

「$a^2 + b^2 = 0$ ならば，$a = b = 0$ である」は真

(エ)

$\{x \mid 1 < x < 2\} \subset \{x \mid 0 < x < 3\}$ より

「$1 < x < 2$ ならば，$0 < x < 3$ である」は真

よって真であるものは　$\underline{\underline{(ウ)と(エ)}}$

(4) 2つの条件を $p : x = 5$，$q : x^2 = 25$ とするとき，

$p \Rightarrow q$ は真であるが，$q \Rightarrow p$ は偽（反例 $x = -5$）である。

したがって，p は q であるための十分条件であるが必要条件ではないので　$\underline{\underline{(イ)}}$

(5) 命題「n が偶数ならば，n^2 は偶数である。」

の対偶は，

$\underline{\underline{「n^2 が奇数ならば，n は奇数である。」}}$

[α − 12] 場合の数と確率

(1) （大きいさいころの目，小さいさいころの目）と表すと，目の和が7になる場合は，(1，6)，(2，5)，(3，4)，(4，3)，(5，2)，(6，1) の $\underline{\underline{6通り}}$

(2) 項の数は積の法則を使って，

$3 \times 4 = \underline{\underline{12}}$

(3) 男子の委員の選び方が ${}_5C_1$ 通りで，そのおのおのに対して女子の委員の選び方が ${}_6C_1$ 通りずつあるから

${}_5C_1 \times {}_6C_1 = 5 \times 6 = \underline{\underline{30\ (通り)}}$

(4) くじの引き方は10通りで，当たりくじはそのうちの2通りだから，当たりくじを引く確率は

$\dfrac{2}{10} = \underline{\underline{\dfrac{1}{5}}}$

(5) 10個の球が入っている袋から同時に3個の球を取り出す場合は ${}_{10}C_3$ 通りで，そのうち，白球2個と赤球1個を取る場合は ${}_6C_2 \times {}_4C_1$ 通りあるから求める確率は

$\dfrac{{}_6C_2 \times {}_4C_1}{{}_{10}C_3} = \dfrac{60}{120} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$

平成17年度　秋季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{S II }\alpha}$ 解答 No. 4

[α − 13] 場合の数と確率（確率は除く）

(1) ${}_6P_2 = 6\times5$
$= \underline{\underline{30}}$

(2) 5人全員が1列に並ぶ順列だから
${}_5P_5 = 5! = 5\times4\times3\times2\times1$
$= \underline{\underline{120}}$ (通り)

(3) 7個の点から3個の点を選ぶ組合せだから
${}_7C_3 = \dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = \underline{\underline{35}}$ (個)

(4) $54 = 2\times3^3$ であるから，54の正の約数は，
2の正の約数のそれぞれと 3^3 の正の約数のそれぞれとの積で表される。
2の正の約数は，1，2の2個
3^3 の正の約数は，1，3，3^2，3^3 の4個である。
したがって54の正の約数の個数は，
積の法則により　$2\times4 = \underline{\underline{8}}$ (個)

(5) $aabb$ の並びかえだから，同じものを含む順列の総数は，
$\dfrac{4!}{2!2!} = \underline{\underline{6}}$ (通り)

【参考】
実際に並べてみると次のようになる。
$aabb$
$abab$
$abba$
$baab$
$baba$
$bbaa$　　　したがって　6 (通り)

[α − 14] 方程式と不等式

(1) $(2x+1)(2x-1)(4x^2+1)$
$= (4x^2-1)(4x^2+1)$
$= (4x^2)^2 - 1^2$
$= \underline{\underline{16x^4-1}}$

(2) x^3-11x^2+30x
$= x(x^2-11x+30)$
$= \underline{\underline{x(x-5)(x-6)}}$

(3) $0.6x+2 < 0.8x+1$
両辺を10倍して
$6x+20 < 8x+10$
$6x-8x < 10-20$
$-2x < -10$
$\underline{\underline{x > 5}}$

(4) $\sqrt{20} + \dfrac{20}{\sqrt5} - 3\sqrt5$
$= 2\sqrt5 + \dfrac{20\sqrt5}{5} - 3\sqrt5$
$= 2\sqrt5 + 4\sqrt5 - 3\sqrt5$
$= \underline{\underline{3\sqrt5}}$

(5) $x=2$ が2次方程式 $x^2+x+a=0$ の解であるから，$2^2+2+a=0$
$\underline{a = -6}$　△2
したがって，与えられた方程式は
$x^2+x-6=0$
$(x+3)(x-2)=0$
$x = -3,\ 2$
よって，$x=2$ 以外のもう1つの解は
$x = -3$
ゆえに
$\underline{\underline{a=-6，もう1つの解は x=-3}}$　⑤
($a=-6$ ができて2点，両方できて5点)

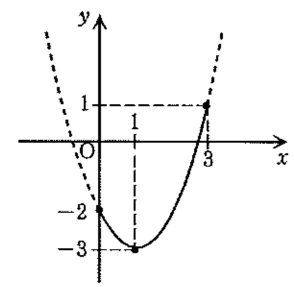
[α − 15] 2 次 関 数

(1) 2次関数 $y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものは，2次関数 $y = a(x-p)^2+q$ であるから，求める2次関数は
$y = (x-2)^2+3$　　よって $\underline{\underline{(イ)}}$

(2) 2次関数 $y = -(x-2)^2-4$ のグラフの頂点の座標は，$\underline{\underline{(2,\ -4)}}$

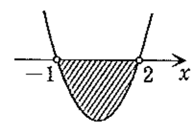
(3) 2次関数 $y = x^2-5x-24$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は，$y=0$ として
$x^2-5x-24=0$
$(x-8)(x+3)=0$
$\underline{\underline{x = 8,\ -3}}$

(4) $y = x^2-2x-2$ を変形すると
$y = (x-1)^2-3$ となるので，
2次関数 $y = x^2-2x-2$ の $0 \leqq x \leqq 3$ におけるグラフは図のようになる。



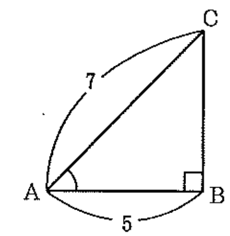
よって，$x=1$ のとき
最小値　$\underline{\underline{-3}}$

(5) $(x+1)(x-2) < 0$ より
$\underline{\underline{-1 < x < 2}}$



[α − 16] 図形と計量

(1) 図より $\underline{\underline{\cos A = \dfrac{AB}{CA} = \dfrac{5}{7}}}$



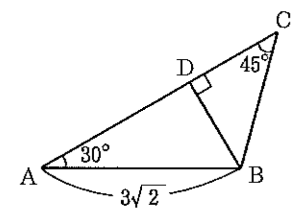
(2) $\cos30^\circ \times \tan150^\circ$
$= \dfrac{\sqrt3}{2}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt3}\right)$
$= \underline{\underline{-\dfrac{1}{2}}}$

(3) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より
$\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = \underline{\underline{1}}$

(4) △ABC の面積は，
$\dfrac12\times AB\times BC\times\sin B$
$= \dfrac12\times6\times5\times\sin150^\circ$
$= \dfrac12\times6\times5\times\dfrac12$
$= \underline{\underline{\dfrac{15}{2}}}$

(5) 正弦定理より，
$\dfrac{BC}{\sin30^\circ} = \dfrac{3\sqrt2}{\sin45^\circ}$
$BC = \dfrac{3\sqrt2\sin30^\circ}{\sin45^\circ}$
$= 3\sqrt2\times\dfrac12\div\dfrac{1}{\sqrt2}$
$= 3\sqrt2\times\dfrac12\times\sqrt2$
$= \underline{\underline{3}}$

【別解】
右図のように頂点Bから辺ACにおろした垂線の足をDとする。



△ABD は，30°，60°，90° の直角三角形であるから，
AB : BD = 2 : 1 より
2BD = AB
$BD = \dfrac12 AB = \dfrac12\cdot3\sqrt2 = \dfrac{3\sqrt2}{2}$
△BCD は，45°，45°，90° の直角三角形であるから
$BC : BD = \sqrt2 : 1$ より
$BC = \sqrt2\,BD = \sqrt2\times\dfrac{3\sqrt2}{2} = \dfrac62 = \underline{\underline{3}}$

β共通問題

(1) $\dfrac{a^2-4}{a+1}\div\dfrac{a+2}{a^2-1}$

$=\dfrac{\cancel{(a+2)}(a-2)}{\cancel{a+1}}\times\dfrac{\cancel{(a+1)}(a-1)}{\cancel{a+2}}$

$=\underline{\underline{(a-1)(a-2)}}$

(2) $a^4=(2+i)^4=\{(2+i)^2\}^2$
$=(2^2+2\times2\times i+i^2)^2=(3+4i)^2$
$=3^2+2\times3\times4i+(4i)^2$
$=9+24i+16i^2=\underline{\underline{-7+24i}}$

(3) 2つの解は，α，2α と表すことができる。
すると，解と係数の関係から
$\alpha+2\alpha=6$，$\alpha\times2\alpha=m$
すなわち　$3\alpha=6$，$2\alpha^2=m$
ゆえに　$\alpha=2$ より $m=2\times2^2=\underline{\underline{8}}$

(4) 原点を中心とし，半径3である円の方程式は
$x^2+y^2=9$ である。斜線部分の領域は
この円の内部であり，境界線を含むから
これを表す不等式は $\underline{\underline{x^2+y^2\leqq9}}$

(5) 点Pの座標を $(x,\ y)$ とすると，$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$
すなわち $\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$ が成り立つから
$(x-2)^2+(y-1)^2=x^2+(y-3)^2$
$x^2-4x+4+y^2-2y+1=x^2+y^2-6y+9$
$-4x+4y-4=0$
よって，求める軌跡の方程式は　$\underline{\underline{y=x+1}}$
逆に，これを満たす x，y は条件を満たす。
（※　この軌跡は線分ABの垂直二等分線である。）

(6) $x^2+y^2-2x+4y+k=0$ を変形して
$(x-1)^2+(y+2)^2=-k+5$
これが円を表すとき，$-k+5>0$ が成り立つ。
よって，$\underline{\underline{k<5}}$

(7)(ア)　左辺−右辺
$=a^2+b^2-(6a+4\underline{b-13)}$ △2
$=a^2-6a+9+b^2-4b+4$
$=(a-3)^2+(\underline{b-2)^2}$ △6
$(a-3)^2\geqq0$，$(b-2)^2\geqq0$ であるから
左辺−右辺 $\geqq0$
よって，$a^2+b^2\geqq6a+4b-13$　⑦

(イ)　(ア)より，等号が成り立つのは
$a-3=0$ かつ $b-2=0$
すなわち　$\underline{\underline{a=3,\ b=2}}$　③

(8)(ア)
$\begin{cases}x^2+y^2=25 & \cdots ① \\ y=2x+5 & \cdots ②\end{cases}$ の解は

②を①に代入して
$x^2+(2x+5)^2=25$，$5x^2+20x=0$
$x^2+4x=0$，$x(x+4)=0$，$x=0,\ -4$
よって共有点の座標は $\underline{\underline{(0,\ 5),\ (-4,\ -3)}}$　③

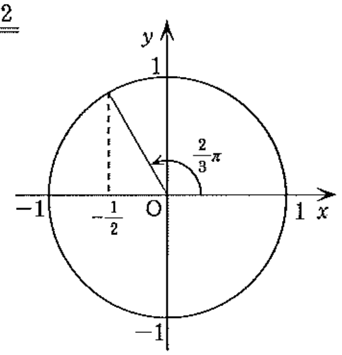
(イ)　$x^2+y^2=25\ \cdots①$，$y=2x+k\ \cdots②$　とおく。
②を①に代入すると $x^2+\underline{(2x+k)^2=25}$ △2
$5x^2+4kx+k^2-25=0$
共有点をもつことから判別式を D とすると，
$\underline{D=(4k)^2-4\times5\times(k^2-25)\geqq0}$ △4
この式を整理すると，$k^2-125\leqq0$
すなわち，$\underline{\underline{-5\sqrt{5}\leqq k\leqq5\sqrt{5}}}$　⑦

β選択問題

［β−1］三角関数

(1) $\cos\left(-\dfrac{8}{3}\pi\right)=\cos\dfrac{8}{3}\pi=\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi+2\pi\right)$

$=\cos\dfrac{2}{3}\pi=\underline{\underline{-\dfrac{1}{2}}}$



(2) θ が第3象限の角だから $\cos\theta<0$

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$

よって

$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{5})^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\underline{\underline{-\dfrac{\sqrt{6}}{6}}}$

(3) 加法定理より
$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{6}$ だから

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin\dfrac{\pi}{6}=\underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$

(4) $y=\sin x+2\cos x$
$=\sqrt{1^2+2^2}\sin(x+\alpha)$
$=\sqrt{5}\sin(x+\alpha)\ \cdots①$
ただし α は，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$
を満たす角
①より $\underline{\underline{-\sqrt{5}\leqq y\leqq\sqrt{5}}}$

(5) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは $y=\sin x$ のグラフを

x 軸方向に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したものである。

したがって，点 $(\pi,\ 0)$ を x 軸方向に

$\dfrac{\pi}{3}$ だけ移動すると点Aになる。

ゆえに点Aの x 座標は

$\pi+\dfrac{\pi}{3}=\underline{\underline{\dfrac{4}{3}\pi}}$

［β−2］指数関数・対数関数

(1) $27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^{3\times\frac{2}{3}}=3^2=\underline{\underline{9}}$

(2) $2^{2x+1}\leqq8$ より
$2^{2x+1}\leqq2^3$
底2は1より大きいから
$2x+1\leqq3$　よって $\underline{\underline{x\leqq1}}$

(3) $3\log_{10}5+\log_{10}18-2\log_{10}15$
$=\log_{10}5^3+\log_{10}18-\log_{10}15^2$
$=\log_{10}\left(125\times18\times\dfrac{1}{225}\right)$
$=\log_{10}10=\underline{\underline{1}}$

(4) $\log_5 12=\dfrac{\log_{10}12}{\log_{10}5}=\dfrac{\log_{10}(2^2\times3)}{\log_{10}\dfrac{10}{2}}$

$=\dfrac{\log_{10}2^2+\log_{10}3}{\log_{10}10-\log_{10}2}=\dfrac{2\log_{10}2+\log_{10}3}{1-\log_{10}2}$

$=\underline{\underline{\dfrac{2a+b}{1-a}}}$

(5) $\log_2 x+\log_2(x-3)=2$ において
真数条件より $x>0$ かつ $x-3>0$
よって $x>3\ \cdots①$
また，与式を変形して
$\log_2 x(x-3)=2$
よって $x(x-3)=2^2$
$x^2-3x=4$　　$x^2-3x-4=0$
$(x+1)(x-4)=0$　　$x=-1,\ 4$
①より　$x=\underline{\underline{4}}$

［β−3］微分・積分の考え

(1) $f'(x)=2x+a$，$f'(2)=5$ より
$f'(2)=2\times2+a=5$
よって $a=1$
$f(x)=x^2+x+b$，$f(2)=-3$ より
$f(2)=2^2+2+b=-3$
よって $b=-9$
ゆえに　$\underline{\underline{a=1,\ b=-9}}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(-x^2+4x+2)dx$

$=2\displaystyle\int_{0}^{1}(-x^2+2)dx$

$=2\left[-\dfrac{1}{3}x^3+2x\right]_0^1=2\left\{\left(-\dfrac{1}{3}+2\right)-0\right\}$

$=2\times\dfrac{5}{3}=\underline{\underline{\dfrac{10}{3}}}$

平成18年度　秋季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{S II }\beta}$ 解答 No. 2

(3) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2x$ の
交点の x 座標を求めると
$x^2=2x$ より　$x(x-2)=0$
ゆえに $x=0,\ 2$
したがって，求める面積を S とおくと

$$S=\int_0^2(2x-x^2)dx$$

$$=\left[x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$$

(4) $y'=4x-3$
傾きが5だから
$4x-3=5$
$x=2$ よって接点の座標は $(2,\ 4)$ となる。
求める接線の方程式は $y-4=5(x-2)$
ゆえに　$y=5x-6$

(5) $y=x^3-3x^2$ より $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$
$y'=0$ とおいて
$3x(x-2)=0$
$x=0,\ 2$
下の増減表より
極小値 -4 $(x=2)$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	0	↘	−4	↗

[β−4] 式と証明・高次方程式

(1) 解と係数の関係から
$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=2$
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ より
$\alpha^2+\beta^2=5^2-2\times2=21$

(2) $P(x)=x^3+4x^2+x-6$ とおくと
$P(1)=1^3+4\times1^2+1-6=0$
ゆえに $P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。
下の割り算から

$$\begin{array}{rl} & x^2+5x+6 \\ x-1) & \overline{x^3+4x^2+x-6} \\ & \underline{x^3-x^2} \\ & 5x^2+x \\ & \underline{5x^2-5x} \\ & 6x-6 \\ & \underline{6x-6} \\ & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2+5x+6)$
$\quad=(x-1)(x+2)(x+3)$
したがって $P(x)=0$ の解は，
$x=-3,\ -2,\ 1$

(3) $(2+i)^2+a(2+i)+b=0$
$3+4i+2a+ai+b=0$ より
$(3+2a+b)+(4+a)i=0$
$a,\ b$ は実数であるから

$$\begin{cases}3+2a+b=0\\4+a=0\end{cases}$$

これを解いて　$a=-4,\ b=5$

(4) $P(x)=x^3+2x^2+ax+b$ とおくと，
$P(x)$ は $x+1,\ x-1$ で割り切れるから
$P(-1)=0,\ P(1)=0$
よって，$\begin{cases}-1+2-a+b=0\\1+2+a+b=0\end{cases}$
これを解いて　$a=-1,\ b=-2$

(5) 等式の両辺に $(2x-1)(2x+1)$ をかけると
$1=a(2x+1)+b(2x-1)$
右辺を整理すると
$1=(2a+2b)x+(a-b)$
両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$\begin{cases}2a+2b=0\\a-b=1\end{cases}$$

これを解いて　$a=\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{1}{2}$

[β−5] 図形と方程式（軌跡と領域を除く）

(1) 直線 $2x+y-1=0$ の傾きは -2 であるから，
この直線に平行な直線の傾きは -2 である。
求める直線は点 $(-2,\ -5)$ を通るから，
$y+5=-2(x+2)$　ゆえに　$y=-2x-9$
〔$2x+y+9=0$　も可〕

(2) 求める円の方程式を $x^2+y^2+\ell x+my+n=0$
とする。この円が
点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通るので，$n=0$ … ①
点 $\mathrm{A}(0,\ 4)$ を通るので，$16+4m+n=0$ … ②
点 $\mathrm{B}(6,\ 0)$ を通るので，$36+6\ell+n=0$ … ③
①～③を解いて，$\ell=-6,\ m=-4,\ n=0$
以上により，求める円の方程式は
$x^2+y^2-6x-4y=0$
〔$(x-3)^2+(y-2)^2=13$　も可〕

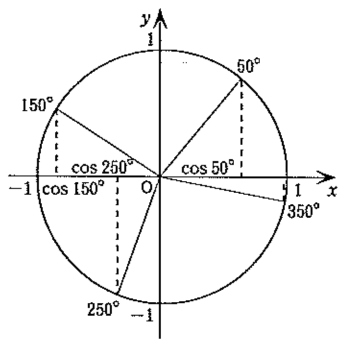
(3) 3点 $\mathrm{A}(1,\ 3),\ \mathrm{B}(5,\ 1),\ \mathrm{C}(0,\ 2)$ を頂点とする
$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とすると，
$\mathrm{G}\left(\dfrac{1+5+0}{3},\ \dfrac{3+1+2}{3}\right)$ よって $\mathrm{G}(2,\ 2)$
点 G が直線 $y=2x+k$ 上にあるので，$2=4+k$
$k=-2$

(4) 2点 $(4,\ 0),\ (0,\ 2)$ を結ぶ線分の中点の座標は
$(2,\ 1)$
2点 $(4,\ 0),\ (0,\ 2)$ を通る直線の傾きは
$\dfrac{2-0}{0-4}=-\dfrac{1}{2}$
その直線に垂直な直線の傾きは2である。
したがって，垂直二等分線の方程式は
$y-1=2(x-2)$
$y=2x-3$

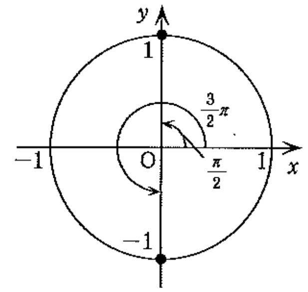
(5) $\begin{cases}x^2+y^2=k & \cdots ①\\ y=x+2 & \cdots ②\end{cases}$
②を①に代入して，
$x^2+(x+2)^2=k$
整理して $2x^2+4x+4-k=0$
判別式を D とすると，
$D=4^2-4\times2\times(4-k)=0$
$-16+8k=0$
$k=2$

[β−6] 三角関数（加法定理を除く）

(1) 右図より
$\cos50°$，
$\cos150°$，
$\cos250°$，
$\cos350°$ のうち，
最も大きい値は
$\cos350°$
したがって，
(エ)



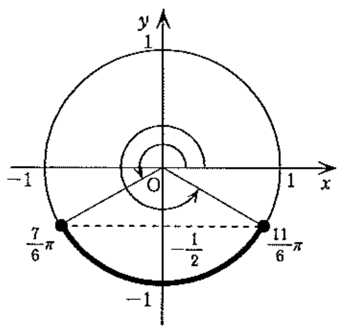
(2) $\sin^2\theta=1$ より
$\sin\theta=\pm1$
だから
右図より
$\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$



(3) $y=\cos\left(3\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos3\left(\theta-\dfrac{\pi}{9}\right)$
このグラフは $y=\cos3\theta$ のグラフを
θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{9}$ だけ平行移動したものである。
3θ が0から 2π まで変化するとき，
θ は0から $\dfrac{2}{3}\pi$ まで変化するから，
周期は $\dfrac{2}{3}\pi$ である。

(4) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$
$\qquad=1+2\sin\theta\cos\theta$
だから $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\times\dfrac{1}{2}=2$

(5) $\sin\theta\leqq-\dfrac{1}{2}$
これを満たす
角 θ の範囲は，
右図より
$\dfrac{7}{6}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{11}{6}\pi$



[β−7] 指数関数・対数関数（対数関数を除く）

(1) $\sqrt[4]{4}\div\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{12}=\sqrt[4]{4\times\dfrac{1}{3}\times12}$
$=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

(2) $27^{\frac{1}{6}}\times9^{\frac{1}{3}}\div3^{\frac{1}{6}}=(3^3)^{\frac{1}{6}}\times(3^2)^{\frac{1}{3}}\div3^{\frac{1}{6}}$
$=3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{2}{3}}\div3^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=3^1=3$

(3) $2^{x^2-5x+9}=8$ より $2^{x^2-5x+9}=2^3$
よって
$x^2-5x+9=3$
$x^2-5x+6=0$
$(x-2)(x-3)=0$
$x=2,\ 3$

平成18年度　秋季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{SⅡ}\beta}$ 解答 No.3

(4) $9^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^3$，$\sqrt[5]{27}=\sqrt[5]{3^3}=3^{\frac{3}{5}}$
$(\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}=(3^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{1}{3}}$
指数を比較して，$\frac{1}{3}<\frac{3}{5}<3$

底3は1より大きいから，$3^{\frac{1}{3}}<3^{\frac{3}{5}}<3^3$
したがって，3つの数を小さい順に左から並べると，$\underline{\underline{(\sqrt{3})^{\frac{2}{3}},\ \sqrt[5]{27},\ 9^{\frac{3}{2}}}}$

(5) $5^x+5^{-x}=4$ の両辺を2乗すると，
$(5^x+5^{-x})^2=4^2$
$(5^x)^2+2\times5^x\times5^{-x}+(5^{-x})^2=16$
$5^{2x}+2+5^{-2x}=16$
$5^{2x}+5^{-2x}=\underline{\underline{14}}$

[β−8] 微分・積分の考え（積分を除く）

(1) $f(x)=x^2+2x$ について，x の値が -1 から2まで変化するときの平均変化率は
$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{(4+4)-(1-2)}{2+1}=\underline{\underline{3}}$

(2) $\lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}}=0+4=\underline{\underline{4}}$

(3) $f(x)=2x^2+1$ とおくと，$f(-1)=3$ であるから，
接点の座標は $(-1,\ 3)$
また，$f'(x)=4x$ であるから $f'(-1)=-4$
よって，接線の傾きは -4
したがって，
求める接線の方程式は $y-3=-4(x+1)$
ゆえに $\underline{\underline{y=-4x-1}}$

(4) $f(x)=ax^2+b$ と，$f'(x)=2ax$ を，
等式 $f(x)+2f'(x)=3x^2+12x+5$ に代入すると
$ax^2+b+2\times2ax=3x^2+12x+5$
$ax^2+4ax+b=3x^2+12x+5$
両辺の係数を比較して，$\underline{\underline{a=3,\ b=5}}$

(5) $f'(x)=6x^2-6$ で，$f'(x)=0$ とおくと，
$6(x+1)(x-1)=0$ より $x=-1,\ 1$
増減表は次のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	7	↘	3

よって $\underline{\underline{最大値\ 7\ (x=-1)}}$

[β−9] 数列

(1) 公差を d とする。
初項が3であるから，この等差数列の第5項は
$3+(5-1)d=3+4d$ と表される。
第5項が19であるから，
$3+4d=19$ より　$d=\underline{\underline{4}}$

(2) 初項を a，公比を r とすると，
第2項が6であるから，$ar=6$ … ①
第4項が54であるから，$ar^3=54$ … ②
② より $ar\times r^2=54$
これに ① を代入して
$6r^2=54$
よって $r^2=9$　r は負より $r=-3$
これを ① に代入して $a\times(-3)=6$
よって $a=-2$
ゆえに第5項は $-2\times(-3)^4=\underline{\underline{-162}}$

(3) 求める和を S とすると，$S=11+16+21+\cdots+96$
初項11，公差5の等差数列の一般項は
$11+(n-1)\times5=5n+6$ となる。
$5n+6=96$ より $n=18$
よって96は第18項となる。
ゆえに $S=\frac{18\times(11+96)}{2}=\underline{\underline{963}}$

(4) $\sum_{k=1}^{9}(k^2-6k)=\sum_{k=1}^{9}k^2-6\sum_{k=1}^{9}k$
$=\frac{1}{6}\times9\times(9+1)\times(2\times9+1)-6\times\frac{1}{2}\times9\times(9+1)$
$=\underline{\underline{15}}$

(5) 与えられた数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると
$\{a_n\}$：3，4，6，10，18，34，……
$\{b_n\}$：　1，2，4，8，16，……
$\{b_n\}$ は初項1，公比2の等比数列であるから，
$b_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$　よって $n\geqq2$ のとき
$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}=3+\frac{1\times(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^{n-1}+2$
ここで初項は $a_1=3$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。
よって，$a_n=\underline{\underline{2^{n-1}+2}}$

[β−10] ベクトル

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(x+2)\times3-6x=-3x+6$
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ より $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるためには $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ となる。
よって $-3x+6=0$ を解いて　$x=\underline{\underline{2}}$

(2) $|\vec{a}+\vec{b}|^2$
$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=4^2+2\times2+1^2=21$
$|\vec{a}+\vec{b}|\geqq0$ なので
$|\vec{a}+\vec{b}|=\underline{\underline{\sqrt{21}}}$

(3) $\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=2:3$ より
$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{2+3}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{5}$ … ①
また，$\mathrm{DP}:\mathrm{PA}=1:1$ より $\overrightarrow{\mathrm{PA}}=-\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ … ②
② に ① を代入して
$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=-\frac{3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{5}$
$=\underline{\underline{-\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{PC}}}}$

(4) 2直線の法線ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とすると，
$\vec{a}=(3,\ -2)$，$\vec{b}=(1,\ -5)$ となる。
$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を α とおくと
$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$，
$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-5)^2}=\sqrt{26}$，
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times1-2\times(-5)=13$ より
$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{13}{\sqrt{13}\times\sqrt{26}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$
$0^\circ\leqq\alpha\leqq180^\circ$ より $\alpha=45^\circ$
$0^\circ\leqq\alpha\leqq90^\circ$ であるので，
この α が求める角 θ となる。
すなわち　$\theta=\underline{\underline{45^\circ}}$

(5) 直角二等辺三角形AEFにおいて，
三平方の定理より
$\mathrm{AF}^2=3^2+3^2$
$\mathrm{AF}=3\sqrt{2}$
同様にして
$\mathrm{AC}=\mathrm{CF}=3\sqrt{2}$ となるから △ACF は正三角形である。
したがって，$\angle\mathrm{CAF}=60^\circ$
$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ のなす角を θ とすると，
$\theta=180^\circ-60^\circ=120^\circ$
よって，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=|\overrightarrow{\mathrm{AF}}||\overrightarrow{\mathrm{CA}}|\cos\theta$
$=3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\times\cos120^\circ$
$=18\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\underline{\underline{-9}}$