

α 共通問題

(1) $2x^2 \times (x^2)^3$
 $= 2x^2 \times x^6$
 $= 2x^8$

(2) $5x^2 - 12x + 4$ $\begin{array}{r} 1 \times -2 \quad -10 \\ 5 \times -2 \quad -2 \\ \hline -12 \end{array}$
 $= (5x-2)(x-2)$

(3) $(2 + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
 $= 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{6}$
 $= 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$
 $= \sqrt{6} + \sqrt{2}$

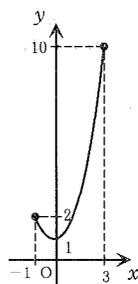
(4) $2x^2 + 5x + 1 = 0$
 $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2}$
 $= \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$

(5) $3 + 5x > 3x + 7$ を解くと
 $5x - 3x > 7 - 3$
 $2x > 4$
 $x > 2$
 したがって、この不等式を満たす x は
 $x = 3, 4$

(6) $y = -2x^2 + 5$ に $x = -1$ を代入して
 $y = -2(-1)^2 + 5$
 $= -2 + 5$
 $= 3$

(7) $y = ax^2$ のグラフを、頂点が点 (p, q) となるように平行移動したグラフは
 $y = a(x-p)^2 + q$ と表される。
 $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 1$ より (イ)

(8) $y = x^2 + 1$ の $-1 \leq x \leq 3$ におけるグラフは、図のようになる。
 したがって
 $x = 3$ のとき、最大値 10
 $x = 0$ のとき、最小値 1



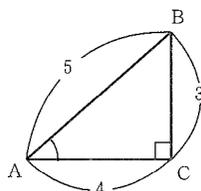
(9) $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸との共有点の個数は、 $b^2 - 4ac$ の値の符号で分かる。
 $b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 + 4 = 8 > 0$
 したがって 2個

(10) $x^2 - x - 6 \leq 0$
 $(x-3)(x+2) \leq 0$
 したがって
 $-2 \leq x \leq 3$

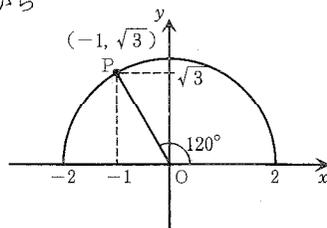
α 選択問題

[α-1] 図形と計量

(1) 図より
 $\cos A = \frac{4}{5}$

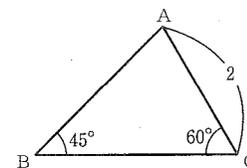


(2) $P(x, y)$ のとき
 $\tan \theta = \frac{y}{x}$ であるから
 $\tan 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$

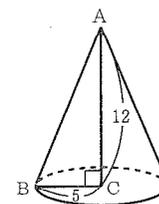


(3) $\triangle ABC$ の面積を S とすると、
 $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ であるから
 $S = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \sin 150^\circ$
 $= \frac{1}{2} \times 30 \times \frac{1}{2}$
 $= \frac{15}{2}$

(4) 正弦定理より
 $\frac{AB}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$
 $AB = \frac{2 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}$
 $= 2 \sin 60^\circ \div \sin 45^\circ$
 $= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $= \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{1}$
 $= \sqrt{6}$



(5) 図のような円錐になる。
 円錐の体積は、
 $\frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高さ}$
 で求まる。したがって求める体積は
 $\frac{1}{3} \times \pi \cdot 5^2 \times 12 = \underline{100\pi}$



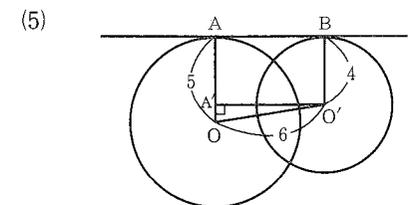
[α-2] 平面図形

(1) $AB < BC < CA$ より $\angle C < \angle A < \angle B$

(2) BD が直径だから
 $\angle BAD = 90^\circ$
 したがって $\angle ADB = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$
 同じ弧に対する円周角は等しいので
 $\angle ACB = \angle ADB = \underline{50^\circ}$

(3) 四角形 $ABCD$ は円に内接しているので
 $\angle BAD = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$
 接線と弦のつくる角の定理により
 $\angle ADB = \angle BAT = 50^\circ$
 したがって
 $\angle ABD = 180^\circ - (75^\circ + 50^\circ)$
 $= \underline{55^\circ}$

(4) 方べきの定理により
 $AP \cdot BP = CP \cdot DP$ であるから
 $AP \cdot 6 = 5 \cdot 7$
 $AP = \frac{35}{6}$



(5) 上図のように O' を通り AB と平行な直線を引き OA との交点を A' とする。
 すると $\triangle OO'A'$ は直角三角形で
 $OA' = 5 - 4 = 1$
 三平方の定理より
 $A'O'^2 + 1^2 = 6^2$ であるから
 $A'O'^2 = 35$
 $A'O' = \sqrt{35}$
 したがって、 $AB = A'O'$ より
 $AB = \underline{\sqrt{35}}$

[α-3] 集合と論理

- (1) 50 以下の自然数のうち、4 の倍数の集合は
 $\{4 \times 1, 4 \times 2, 4 \times 3, \dots, 4 \times 12\}$
 であるから
12個
- (2) \bar{A} は、 U の要素であって A の要素ではないものなので、
 $\bar{A} = \{3, 4, 6, 8\}$
 したがって
 $\bar{A} \cap B = \underline{\{3, 8\}}$
- (3) (ア) 2 の倍数は 4 の倍数とは限らないので 偽
 (反例 6 は 2 の倍数であるが 4 の倍数ではない)
 (イ) $x = 1$ ならば $x^2 - 4x + 3 = 0$ は 真
 (ウ) $ac = bc$ ならば $a = b$ とは限らないので 偽
 (反例 $a = 1, b = 2, c = 0$ のとき $ac = bc$ であるが $a \neq b$)
 (エ) $x < 3$ ならば $x < 4$ は 真
 以上より 真であるものは (イ) と (エ)

平成19年度 春季県下一斉学力テスト S I α 解答 No. 2

- (4) 「四角形 ABCD がひし形 ⇒ 四角形 ABCD が正方形」は 偽 (正方形でないひし形があるから)
 「四角形 ABCD が正方形 ⇒ 四角形 ABCD がひし形」は 真
 したがって必要条件であるが十分条件ではないから (ア)

- (5) 対偶 「 $x = 4$ かつ $y = 2$ ならば、 $xy = 8$ である。」
 この命題は 真

[α-4] 場合の数と確率

- (1) ${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ (個)
- (2) ${}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$ (通り)
- (3) A から B へは $\frac{4!}{3!1!} = 4$ (通り)
 B から C へは $\frac{3!}{2!1!} = 3$ (通り) の方法があるから、
 A から B を通って C へ行く方法は
 $4 \times 3 = 12$ (通り)
- (4) 袋の中の 9 個の球から同時に 3 個を取り出す方法は ${}_9C_3$ 通りある。このうち白球 4 個から 2 個、黒球 5 個から 1 個を取り出す場合は ${}_4C_2 \times {}_5C_1$ 通りである。よって求める確率は

$$\frac{{}_4C_2 \times {}_5C_1}{{}_9C_3} = \frac{\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \times 5}{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{5}{14}$$

- (5) 表, 表, 裏, 裏と出る確率は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$
 表の 2 回がどこで出るかは ${}_4C_2$ 通りの場合があるので

$${}_4C_2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 6 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$

[α-5] 方程式と不等式

- (1) $x^2 + 6x = 7$
 移項して $x^2 + 6x - 7 = 0$
 左辺を因数分解して $(x+7)(x-1) = 0$
 $x = -7, 1$

- (2) $\frac{x-2}{2} < \frac{x}{3}$ の両辺に 6 をかけて
 $6 \times \frac{x-2}{2} < 6 \times \frac{x}{3}$
 $3(x-2) < 2x$
 $3x - 6 < 2x$
 $3x - 2x < 6$
 $x < 6$

- (3) $(\sqrt{6} + \sqrt{3})$ を分母, 分子にかけて

$$\frac{3(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{(\sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{3})} = \frac{3(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{3(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{6 - 3} = \frac{3(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{3} = \sqrt{6} + \sqrt{3}$$

- (4) $(x-1)^2(x+1)^2$
 $= \{(x-1)(x+1)\}^2$
 $= (x^2 - 1)^2$
 $= (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1$
 $= x^4 - 2x^2 + 1$

- (5) $x^2 - 4x + k = 0$ に $x = 1$ を代入して
 $1^2 - 4 \cdot 1 + k = 0$
 $1 - 4 + k = 0$
 $k = 3$

[α-6] 2次関数 (2次不等式は除く)

- (1) 2次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフの頂点の座標は (p, q) である。
 したがって、 $y = -(x-2)^2 + 5$ のグラフの頂点の座標は $(2, 5)$
- (2) 2次関数 $y = x^2 + 3x + 2$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は、方程式 $x^2 + 3x + 2 = 0$ の解である。
 左辺を因数分解して $(x+2)(x+1) = 0$
 したがって $x = -2, -1$
- (3) $y = x^2 - 6x + k$ を変形して
 $y = (x-3)^2 + k - 9$
 したがって、 $x = 3$ のとき最小値 $k - 9$ をとるから $k - 9 = -4$ より $k = 5$
- (4) 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と接する条件は $b^2 - 4ac = 0$ である。
 したがって
 $4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m) = 0$
 $16 + 4m = 0$
 $4m = -16$
 $m = -4$
- (5) $y = x^2 + bx + c$ のグラフが 2 点 $(1, 0)$ と $(3, 0)$ を通るから、
 $x = 1, y = 0$ を代入して
 $1 + b + c = 0 \dots\dots ①$
 $x = 3, y = 0$ を代入して
 $9 + 3b + c = 0 \dots\dots ②$
 ② - ① より
 $8 + 2b = 0$
 $b = -4$
 ① に代入して $1 - 4 + c = 0$ より
 $c = 3$
 したがって $b = -4, c = 3$

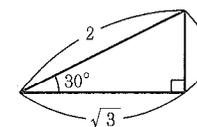
(別解)

$y = x^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と 2 点 $(1, 0)$, $(3, 0)$ で交わるので、この関数は $y = (x-1)(x-3)$ となる。
 展開して、 $y = x^2 - 4x + 3$ より
 $b = -4, c = 3$

[α-7] 図形と計量

(正弦定理, 余弦定理, 図形の計量は除く)

(1) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$



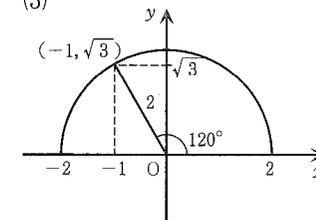
(2) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に $\cos \theta = \frac{3}{4}$ を代入して
 $\sin^2 \theta + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1$

$$\sin^2 \theta = 1 - \frac{9}{16} = \frac{16}{16} - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

θ が鋭角なので、 $\sin \theta > 0$ より

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

- (3) 図より



$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

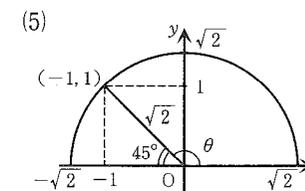
$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

したがって

$$\sin 120^\circ \times \cos 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

- (4) $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ であるから
 $\cos 70^\circ = \cos(90^\circ - 20^\circ)$
 $= \sin 20^\circ$
 したがって (イ)

- (5) $\tan \theta = \frac{1}{-1}$ より
 左図のようになる。

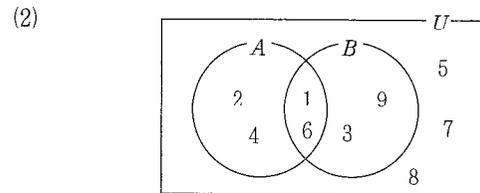


よって、

$$\theta = 135^\circ$$

[β-2] 集合と論理

- (1) (ア) 真 $(x^2-8x+16=0$ の解は $(x-4)^2=0$ より $x=4$ のみ)
- (イ) 偽 (反例: $x=3$ が $-2 < x < 3$ を満たさない)
- (ウ) 偽 (反例: $a=1, b=2, c=0$)
- (エ) 真 (すべての正方形はひし形である)
- (オ) 偽 (反例: $n=8$)
- したがって、真となる命題は、(ア)と(エ)



上の図より、 $A \cap B = \{1, 6\}$ だから
 $A = \{1, 2, 4, 6\}$

- (3) 4の倍数の集合は、 $\{4 \times 1, 4 \times 2, 4 \times 3, \dots, 4 \times 25\}$ で、その要素の個数は25個
6の倍数の集合は $\{6 \times 1, 6 \times 2, 6 \times 3, \dots, 6 \times 16\}$ で、その要素の個数は16個
4と6の公倍数は12の倍数だから、その集合は $\{12 \times 1, 12 \times 2, 12 \times 3, \dots, 12 \times 8\}$ で、その要素の個数は8個
4または6で割り切れる数は $25+16-8 = \underline{33}$ (個)

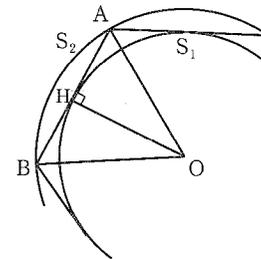
- (4) ①命題「 $x=4 \Rightarrow x^2=16$ 」は真
その逆は、偽
よって $x=4$ は $x^2=16$ であるための十分条件であるが必要条件でない。
- ②命題「 $x=-4$ または $x=4 \Rightarrow x^2=16$ 」は真
その逆も、真
よって $x=-4$ または $x=4$ は $x^2=16$ であるための必要十分条件である。
- ③命題「 $|x| > 0 \Rightarrow x^2=16$ 」は偽
その逆は、真
よって $|x| > 0$ は $x^2=16$ であるための必要条件であるが十分条件でない。
- ④命題「 $x < 0 \Rightarrow x^2=16$ 」は偽
その逆も、偽
よって $x < 0$ は $x^2=16$ であるための必要条件でも十分条件でもない。
したがって ③

[β-3] 場合の数と確率

- (1) 男子が3人並ぶ方法は $3! = 6$ (通り)
女子が3人並ぶ方法は $3! = 6$ (通り)
男女男女男女と女男女男女男があるので、
 $6 \times 6 \times 2 = \underline{72}$ (通り)
- (2) 6桁の整数の十万の位は2または1である。
十万の位が2のとき「0, 1, 1, 1, 2」の並べ方だから $\frac{5!}{1!3!1!} = 20$ (個)
十万の位が1のとき「0, 1, 1, 2, 2」の並べ方だから $\frac{5!}{1!2!2!} = 30$ (個)
よって、6桁の整数は $20+30 = \underline{50}$ (個)
- (3) 1本も当たりくじをひかない確率は $\frac{{}_5C_3}{{}_8C_3}$
よって、少なくとも1本が当たりくじである確率はその余事象の確率だから
 $1 - \frac{{}_5C_3}{{}_8C_3} = 1 - \frac{5}{28} = \underline{\frac{23}{28}}$
- (4) 2個の色は赤と赤か、または青と青だから求める確率は
 $\frac{5}{9} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \underline{\frac{41}{81}}$

[β-4] 数学I①

- (1) 判別式をDとすると、異なる2つの実数解をもつから
 $D > 0$
 $(-3)^2 - 4 \times 1 \times m > 0$
 $-4m > -9$
 $m < \underline{\frac{9}{4}}$
- (2) $y = -x^2 + 4ax + a^2$
 $= -(x-2a)^2 + 5a^2$ より、
 $x = 2a$ のとき、最大値が $5a^2$ となる。
これが5だから
 $5a^2 = 5$
 $a = \pm 1$
- (3) $\triangle ABD$ と $\triangle CBD$ は合同だから、
 $2 \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 45^\circ \right) = \underline{8\sqrt{2}}$
- (4) 円 S_1, S_2 の中心をOとする
 $\angle AOB = 60^\circ$ で、 $OA = OB$ より
 $\triangle OAB$ は正三角形となる。
 $AB = 2$ より $OA = 2$
よって外接円 S_2 の半径は2
また、 AB と円 S_1 との接点をHとすると
 $OH = \sqrt{3}$ となるから内接円 S_1 の半径は $\sqrt{3}$
よって、 S_1 と S_2 の相似比は $\sqrt{3} : 2$ であるので、
その面積比は $(\sqrt{3})^2 : 2^2 = \underline{3 : 4}$



[β-5] 数学I②

- (1) $x^2 + y^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$
 $= 6 + 2\sqrt{12} + 2 + 6 - 2\sqrt{12} + 2$
 $= \underline{16}$
- 【別解】
 $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ を利用する
 $x+y = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{6} \dots ①$
 $xy = (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 4 \dots ②$
 $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$
 $= (2\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 4$
 $= \underline{16}$
- (2) $y = (x+1)^2 + 3$ の頂点の座標は $(-1, 3)$
これをy軸に対称に動かすと
新しい頂点の座標は $(1, 3)$
よって求める放物線の方程式は
 $y = (x-1)^2 + 3$
($y = x^2 - 2x + 4$ も可)
- (3) $\frac{1}{\cos^2 150^\circ} - \tan^2 150^\circ$
 $= 1 + \tan^2 150^\circ - \tan^2 150^\circ = \underline{1}$
- (4) $2 + \sqrt{3} = a + b$ と表すことができる
 $1 < \sqrt{3} < 2$ だから
 $3 < 2 + \sqrt{3} < 4$ よって $2 + \sqrt{3}$ の整数部分が3だから $a = 3$
 $2 + \sqrt{3} = 3 + b$ より
 $b = \sqrt{3} - 1$
よって、 $b^2 - 4a = (\sqrt{3} - 1)^2 - 4 \cdot 3$
 $= \underline{-8 - 2\sqrt{3}}$