SⅡβ（ベータ）

平成 24 年 11 月 9 日実施

神奈川県高等学校教科研究会数学部会編

数　学　学　力　テ　ス　ト

（時間50分）

第	学年	組	番	氏名	

注　意　事　項

1. 開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はこの冊子にはさんであります。
3. 計算はあいているところを使い，答えはすべて解答用紙の決められた欄に書き入れなさい。
4. 選択問題については，[β－1]から[β－9]までの9群のうちから，学校で指定された2群を解答しなさい。

解答上の注意事項

・答えに根号が含まれるときは，根号の中は最も小さい自然数にしなさい。

・答えが分数になるとき，約分できる場合は約分しておきなさい。

S Ⅱ β 学 力 テ ス ト

β 共通問題　次の問いに答えよ。（ここで使用している i は虚数単位とする）

(1) $\dfrac{3-i}{1+2i}$ を計算せよ。

(2) 等式 $(2i+3)x-(2-3i)y=5-i$ を満たす実数 x , y の値を求めよ。

(3) 2次方程式 $2x^2-3x+6=0$ の解を α , β とするとき，$(\alpha+2\beta)(\beta+2\alpha)$ の値を求めよ。

(4) 3点 A$(1\ ,\ 3)$, B$(3\ ,\ -1)$, C$(a\ ,\ 7)$ が一直線上にあるように，定数 a の値を定めよ。

(5) 点 A$(2\ ,\ 4)$ を中心とし，直線 $x-2y+1=0$ に接する円の方程式を求めよ。

(6) 2次方程式 $x^2-2kx+k+2=0$ が虚数解をもつように，実数 k の値の範囲を定めよ。

(7) 3次方程式 $x^3+ax+b=0$ が $1+i$ を解にもつとき，実数の定数 a , b の値を求めよ。
また，その他の解を求めよ。（途中経過を書け）

(8) 直線 $l : x+2y-4=0$ に関して，点 P$(1\ ,\ -1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。
（途中経過を書け）

β 選択問題　[β－1] から [β－9] までの9群のうち，学校で指定された2群を解答すること。

[β－1] 三角関数

(1) $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，方程式 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解け。

(3) $\sin\alpha=-\dfrac{3}{4}$ のとき，$\sin2\alpha$ の値を求めよ。ただし，$\dfrac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$ とする。

(4) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，不等式 $\tan\theta<-\sqrt{3}$ を解け。

(5) 関数 $y=\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta+1$ の最大値および最小値を求めよ。

[β－2] 指数関数・対数関数

(1) $\sqrt[3]{7}\times\sqrt[6]{7}\div\sqrt{7}$ を計算せよ。

(2) $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$ を簡単にせよ。

(3) $\log_4 5\cdot\log_5 8$ を計算せよ。

(4) 0.2^{30} を小数で表したとき，小数第何位に初めて0でない数字が現れるか。
ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

(5) 不等式 $\log_2 x+\log_2(x+1)\leqq1$ を解け。

[β－3] 微分・積分の考え

(1) 次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

$$F'(x)=3x^2-6x+5\ ,\ F(1)=-1$$

(2) 2つの放物線 $y=x^2-x+1$, $y=2x^2-3x+1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) 関数 $y=x^3-12x+a$ の極大値が 10 となるように，定数 a の値を定めよ。

(4) 関数 $f(x)=x^3+kx^2-3kx+2$ が極値をもたないように，定数 k の値の範囲を定めよ。

(5) 曲線 $y=x^3+ax+1$ が直線 $y=2x-1$ に接するとき，定数 a の値を求めよ。

[β－4] 式と証明・高次方程式 (ここで使用している i は虚数単位とする)

(1) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-2x}$ を計算せよ。

(2) 方程式 $2x^3-7x^2+x+10=0$ を解け。

(3) 整式 $P(x)=x^3+ax^2-x+b$ を $x+1$ で割っても，$x-3$ で割っても余りが -2 であるように，定数 a , b の値を定めよ。

(4) 和が -5，積が 13 である 2 数を求めよ。

(5) $z=\dfrac{2+ki}{1+i}+\dfrac{k-4i}{1-i}$ が実数になるように，実数 k の値を定めよ。

[β－5] 図形と方程式 (軌跡と領域を除く)

(1) 2点 A$(-1, 2)$, B$(1, 5)$ を2つの頂点とし, G$(2, 1)$ を重心とする △ABC の頂点Cの座標を求めよ。

(2) 方程式 $x^2+y^2-4x+8y-3=0$ が表す円の中心の座標と半径を求めよ。

(3) 平行な2直線 $2x-y+5=0$, $4x-2y-5=0$ 間の距離を求めよ。

(4) 円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=x+m$ が共有点をもつとき, 定数 m の値の範囲を求めよ。

(5) 点$(5, -10)$から, 円 $x^2+y^2=25$ に引いた接線の方程式を求めよ。

[β－6] 三角関数 (加法定理を除く)

(1) 半径4, 中心角 $\dfrac{3}{4}\pi$ である扇形の面積を求めよ。

(2) $\cos\left(-\dfrac{10}{3}\pi\right)$ の値を求めよ。

(3) θ が第3象限の角で, $\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$ のとき, $\tan\theta$ の値を求めよ。

(4) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき, 方程式 $\sqrt{3}\tan\theta+1=0$ を解け。

(5) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき, 不等式 $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)<\dfrac{1}{2}$ を解け。

[β－7] 指数関数・対数関数 (対数関数を除く)

(1) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^5 \times \sqrt[6]{a^{10}}$ を計算せよ。ただし，$a>0$ とする。

(2) 次の3つの数を小さい順に左から並べよ。

2^{30}，3^{20}，5^{10}

(3) 方程式 $2^{x+2}=\left(\dfrac{1}{32}\right)^{x-2}$ を解け。

(4) 不等式 $4^x-2^{x+1}-8<0$ を解け。

(5) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ のとき，$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$ の値を求めよ。

[β－8] 数　　列

(1) 1から200までの自然数のうち，3の倍数の和を求めよ。

(2) 第2項が12，第5項が -324 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

(3) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(6k^2-4k+1)$ を求めよ。

(4) 4，6，10，18，34，66，…… で表された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(5) $a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n-2$ $(n=1，2，3，……)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[β－9] ベクトル

(1) 2つのベクトル $\vec{a}=(3\ ,\ -1)$, $\vec{b}=(t-8\ ,\ -3t)$ が平行になるように，定数 t の値を定めよ。

(2) ベクトル $\vec{a}=\left(2\ ,\ -\sqrt{5}\right)$ に垂直で，大きさが6のベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

(3) $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=1$, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{13}$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(4) 3点 O$(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$, A$(3\ ,\ 1\ ,\ -1)$, B$(-1\ ,\ -2\ ,\ -3)$ を通る平面 α 上に点 P$(x\ ,\ 3\ ,\ 2)$ があるように，定数 x の値を定めよ。

(5) △OAB において，辺 OA を 1 : 2 に内分する点を C，辺 OB を 3 : 2 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。